Liste Exercices Spé

Antoine Commaret et Youcef Akrout

2 septembre 2021

Table des matières

1 Algèbre

1.1 Groupes

1.1.1 Sous-groupe engendré par 2 éléments (*) (1)

Soit G un groupe abélien. Soient a et b deux éléments d'ordre premiers entre eux.
Montrer que $< a, b >=< a + b >$.

1.1.2 Une version affaiblie du théorème de Cauchy (*) (2)

Soit G un groupe fini de cardinal pair. Montrer qu'il existe un $x \in G$ non nul tel que $x^2 = e$.

1.1.3 $G^2 = \{e\}$ (**) (3)

Soit G un groupe fini tel que, $\forall x \in G$, $x^2 = e$.

1. Montrer que G est commutatif.
2. Soit H un sous-groupe propre de G et soit $x \notin H$. Quel est le cardinal du sous-groupe engendré par H et x ?
3. En déduire que $|G|$ est une puissance de 2.

1.1.4 Groupes Ordonnés (**) (4)

Soit Γ un groupe qui contient une partie H stable par produit telle que :

1. $H \cup H^{-1} = \Gamma$.
2. $H \cap H^{-1} = \{e\}$

Montrer qu'il existe un ordre unique tel que les éléments plus grand que e soient ceux de H.

1.1.5 Groupe fini abélien (5)

Soit G un groupe fini abélien.

1. Montrer qu'il existe un élément d'ordre le PPCM des ordres des éléments de G.

1.1.6 Quelques groupes classiques (**) (6)

On sait déja que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $SL_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\Gamma(N)$

1.1.7 Un nombre fini de sous-groupes (***) (7)

Montrer qu'un groupe G est fini si et seulement si il possède un nombre fini de sous-groupes.

1.1.8 Exercice de Samuel (****) (8)

Soit G un groupe de cardinal pair $|G| = 2n$.
On note $H = \{F \prec G, |F| = n\}$. Montrer que $|H| \neq 2$.

1.1.9 Groupe fini non abélien (****) (9)

Soit G un groupe fini non abélien.

1. On pose $Z(G)$ le centre de G. C'est le sous-groupe consitué des éléments qui commutent avec tous les éléments de G. Montrer que $|Z(G)| \leq \frac{1}{4}|G|$
2. Montrer que la probabilité que deux éléments du groupe commutent est $\leq \frac{5}{8}$.

1.2 Arithmétique modulaire

1.2.1 Restes chinois (*) (10)

Soit d un nombre sans facteur carré. Compter le nombre de solutions positives inférieures à n de l'équation :

$$m(m + 2) \equiv 0(d)$$

1.2.2 Quasi-involution(**) (11)

Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(f \circ f)(n) = n + 2019\ \forall n \in \mathbb{N}$?

1.2.3 Base et multiplicité (**) (12)

Existe-t-il un multiple de 23 ne s'écrivant qu'avec des 1 en base 10 ? Généraliser.

1.2.4 Congruences et bijectivité(**) (13)

Est-ce que la connaissance de n mod p pour tout p premier permet de remonter à la valeur de n dans $\mathbb{Z}$?

1.2.5 Caractérisation des rationnels (***) (14)

Montrer qu'un réel est rationnel si et seulement si son développement dans toute base entière est périodique à partir d'un certain rang.

1.2.6 Lemme de Vinogradov(**) (15)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et deux entiers naturels premiers entre eux a, q tels que $1 \leq q \leq Q$ $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{qQ}$.
Montrer que pour une une suite de $n = n_0, n_0 + 1, \dots n_0 + q - 1$, les distances $d(n\alpha, \mathbb{Z})$ sont au moins

$$0, 0, \frac{1/2}{q}, \frac{1}{q}, \dots, \frac{(q-2)/2}{q}$$

dans un certain ordre.

1.2.7 Caractères(**) (16)

Soit G un groupe abélien fini. Un morphisme $\chi : G \to \mathbb{C}$ est appelé *caractère*.

1. Montrer que $\forall g \in G$, on a$|\chi(g)| = 1$.
2. Montrer que $\sum_{g \in G} \chi(g) = |G|\, \delta_{\chi,1}$ où 1 est le caractère trivial.
3. On suppose que G est un produit de groupes cycliques. Montrer que les caractères de G forment une base orthonormale des fonctions de G dans $\mathbb{C}$, avec le produit scalaire $\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g)$.
4. En déduire que toute fonction $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ q-périodique s'écrit $f(n) = \sum_{\chi \in \bar{G_q}} \hat{f}(\chi)\chi(n)$, où $G_q = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$.

1.2.8 Caractères de Dirichlet et fonctions L(***) (17)

Soit $q \in \mathbb{N}$. On dit qu'un morphisme $\chi : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}$ est un caractère modulo q. On prolonge un tel caractère en un caractère de Dirichlet modulo q lorsque

$$\begin{cases} \chi(n) = 0 & \text{si}(n, q) > 1 \\ \chi(n + q) = \chi(n) & \forall n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

1. Montrer que
$$\sum_{n \in I} \chi(n) = 0$$
si χ n'est pas trivial, pour tout I un intervalle de longueur q.
2. On pose $L_\chi(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$. Montrer que cette fonction est bien définie pour $\Re s > 1$.
3. Montrer qu'on a dans ce domaine de définition $L_\chi(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1}$

1.2.9 Vérification de la formule de Jacobi pour les puissances de 2(***) (18)

La formule de Jacobi dit que $r(n) = 8 \sum_{4 \nmid d | n} d$, où $r(n)$ est le nombre de façons d'écrire n comme somme de 4 carrés dans $\mathbb{Z}^4$, permutations comprises.
Montrer que cette formule est valide pour les puissances de 2.

1.2.10 Proba que 2 nombres soient premiers entre eux (***) (19)

On pose $r_n = \mathbb{P}(2 \text{ entiers dans } [\![1, n]\!] \text{ sont premiers entre eux})$. On introduit μ la fonction de Möbius.

1. Montrer que $r_n = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{d=1}^{n} \mu(d) \lfloor \frac{n}{d} \rfloor^2$.
2. Calculer $\sum\limits_{d|n} \mu(d)$.
3. Montrer que $r_n \to \frac{6}{\pi^2}$.

1.2.11 Une équation Diophantienne(***) (20)

Résoudre dans $\mathbb{Q}^3$ l'équation suivante :

$$X^2 + Y^2 = 3Z^2$$

1.2.12 Carré modulo p (***) (21)

Soit p premier. Montrer que -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \Leftrightarrow p \equiv 1(4)$

1.2.13 Théorème de Wilson... et plus si affinités (***) (22)

1. Montrer que p est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1(p)$
2. Pour $m \leq 2$, montrer que $(m, m+2)$ est un couple de nombres premiers si et seulement si $4[(m+1)!-1]+m$ est divisible par $m(m+2)$.

1.2.14 Nombres de Carmichaël(***) (23)

Un entier n est dit *de Carmichaël* lorsqu'il n'est pas premier et qu'il vérifie le petit théroème de Fermat, c'est-à-dire que pour tout a premier avec n, on a :

$$a^{n-1} \equiv 1(n)$$

1. *Lemme : Théorème de Cauchy abélien*
   Montrer que si p divise l'ordre d'un groupe abélien G, alors il existe dans G un élément d'ordre p.
2. En déduire que si n est un nombre Carmichaël, il est impair, n'a pas de facteur carré et si on l'écrit $n = p_1 \dots p_q$, alors $p_i - 1$ divise $n - 1$ pour tout i.
3. Montrer la réciproque.

1.2.15 Cyclicité des $(\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})^*$ (***) (24)

Soit p un nombre premier > 2.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est cyclique.
2. On considère une racine g primitive mod p. Montrer que modulo p^2, elle est d'ordre $p(p-1)$ ou $p-1$. Dans le second cas, que dire de $g+p$?
3. Soit $\nu \geq 2$. Soit g une racine primitive mod p^2. Montrer que $g^{p-1} = 1 + hp$ où h est premier avec p. En déduire que $g^{\phi(p^\nu)} \not\equiv 1(p^{\nu+1})$.

1.2.16 Théorème de Wolstenholme(****) (25)

Soit p un nombre premier. On considère

$$H_{p-1} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i}$$

.
Montrer que p^2 divise le numérateur de H_{p-1}.

1.3 Anneaux

1.3.1 Premier cours Algèbre 2 (26)

Soit A un anneau et I un idéal propre de A.

1. Montrer que I idéal maximal ssi $\forall a \in A \setminus I, I + aA = A$.
2. Montrer que I idéal maximal implique I idéal premier.
3. Quels sont les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$? Les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$?
4. On pose $A = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et I l'idéal des fonctions s'annulant en 0. Est-il généré par un seul élément ? maximal ? premier ?
5. $J = \{f \in A : \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = 0\}$. J est-il un idéal ? Si oui, est-il principal ? premier ? maximal ?

1.3.2 Anneau de polynômes principal(***) (27)

1. $\mathbb{Z}[X]$ est-il un anneau principal ?
2. Montrer que si A est un corps, $A[X]$ est un anneau principal.
3. Montrer la réciproque (on rappelle que A est intègre).

1.3.3 Prop des $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$(*) (28)

1. Quels sont les morphismes d'anneaux $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
2. Quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$?

1.3.4 Anneau Noethérien(**) (29)

On dit qu'un anneau est *noethérien* lorsque tous ses idéaux sont de type fini, c'est-à-dire engendré par un nombre fini d'éléments.

1. Montrer que dans un anneau noethérien, tout élément s'écrit à un inversible près comme un produit fini d'éléments irréductibles.
2. Montrer qu'un anneau est noethérien si et seulement si toute suite croissante d'idéaux est stationnaire.

Montrer qu'un anneau est noethérien si et seulement si toute suite croissante d'idéaux est stationnaire.

1.3.5 Corps finis(***) (30)

Soit F un corps fini, dont on note q le cardinal.

1. Montrer que q est nécessairement une puissance de nombre premier.
2. Montrer que les inversibles de F forment un groupe cyclique.

1.3.6 Sur les sommes de deux carrés(***) (31)

On se place dans l'anneau de Gauss $\mathbb{Z}[i]$. Soit p premier.

1. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

$$\left|\begin{array}{ll} p \text{ est irréductible} & (1) \\ p \equiv 3(4) & (2) \\ p \text{ n'est pas la somme de 2 carrés.} & (3) \end{array}\right.$$

2. En déduire qu'un nombre s'écrit comme somme de deux carrés *si et seulement si* la valuation de tout nombre premier congru à 3 modulo 4 est paire.

1.3.7 Nombres de Mersenne et Algorithme de Lucas(**) (32)

On pose $s_0 = 4$ et $M_p = 2^p - 1$ et on définit la suite s_i par la formule de récurrence $s_{i+1} = s_i^2 - 2$. Notre objectif est de montrer que si $s_{p-2} \equiv 0(M_p)$, alors $2^p - 1$ est premier.

1. Montrer que M_p premier implique que p est premier.
2. Montrer que $s_i = \omega^{2^i} + \overline{\omega}^{2^i}$, avec $\omega = 2 + \sqrt{3}$ et son conjugué.
3. On suppose que $s_{p-2} = kM_p$. Montrer que $\omega^{2^{p-1}} = kM_p\omega^{2^{p-2}} - 1$.

4. On pose q le plus petit diviseur premier de M_p.
   Définir une multiplication naturelle de sorte que $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ soit un anneau. Contient-il ω ?
5. Calculer l'ordre de ω dans le groupe des inversibles de A.
6. Conclure.

1.4 Polynômes

1.4.1 Nullstellensatz(***) (33)

On se place dans $\mathbb{C}[X, Y]$ l'anneau des polynômes à deux variables à coefficients dans $\mathbb{C}$. Montrer l'ensemble des polynômes qui s'annulent en $(0, 1)$ est l'idéal engendré par $X, Y - 1$.

1.4.2 Relation coefficients/racines(**) (34)

Calculer pour n dans $\mathbb{N}$, le produit :

$$\prod_{i=1}^{n-1} \sin(\frac{i\pi}{n})$$

1.4.3 PGCD, extension de corps(**) (35)

Soit L un corps et K un sous-corps de L. Soient P et Q deux polynômes de $K[X]$.
Montrer que $\text{pgcd}(P, Q)_K = \text{pgcd}(P, Q)_L$.

1.4.4 Inégalités coefficients/racines(***) (36)

Soit $P \in \mathbb{R}[X] = \sum_{i\leq n} a_i X^i = a_n \prod_{0\leq j\leq n}(X - \alpha_j)$
On pose $||P||_2 = \sum_{|a_i|^2}^{\frac{1}{2}}$ et $||P|| = |a_n| \prod \max(|\alpha_j|, \frac{1}{|\alpha_j|})$.
Montrer que $||P|| \leq ||P||_2$.

1.4.5 Lemme de Centrale 2 2017(**) (37)

Soit p un nombre premier. On suppose qu'il existe U et V deux polynômes réels, de degrés respectifs r et s, tels que :

$$U(T)V(T) = 1 + T + \cdots + T^{n-1}$$

Montrer que $T^r U(\frac{1}{T}) = U(T)$.

1.5 Espaces vectoriels (Révisions)

1.5.1 Généralisation du fameux exercice classique (38)

Soit E un K-ev de dimension finie. Soit $a \neq 0$ dans E. Caractériser les endomorphismes u tel que $\forall x \in E$, $(a, x, u(x))$ libre.

1.5.2 Maschke (39)

Soit E un K-ev et G un sous-groupe fini de $GL(E)$. Soit V un sev de E stable par G. Montrer que V admet un supplémentaire stable par G.

1.5.3 Automorphismes d'algèbres (40)

Soit E un K-ev de dimension finie. Montrer que tous les automorphismes d'algèbre sur $\mathcal{L}(E)$ s'écrivent comme $u \mapsto \tau \circ u \circ \tau^{-1}$ avec $\tau \in GL(E)$.

1.5.4 Un avant-goût de la Réduction (41)

Soit E un K-ev de dimension finie. Soit $f \in L(E)$ tel que $(f - a\,\text{Id}) \circ (f - b\,\text{Id}) = 0$.

1. Montrer que $\exists\lambda \neq 0 : \exists\mu \neq 0 : \lambda(f - a\,\text{Id})$ et $\mu(f - b\,\text{Id})$ soient des projecteurs.
2. Montrer que $\text{Ker}(f - a\,\text{Id}) = \text{Im}(f - a\,\text{Id})$.
3. Calculer f^n pour $n \in \mathbb{N}$ puis pour $n \in \mathbb{Z}$ si $ab \neq 0$.

1.6 Matrices

1.6.1 Dualité sur les matrices (42)

On pose $E := M_n(K)$.

1. Montrer que $M \mapsto (A \mapsto \mathrm{Tr}(AM))$ est un isomorphisme de E vers E^*.
2. Caractériser les $f \in E^*$ tel que $\forall X, Y, f(XY) = f(YX)$.
3. Montrer que tout hyperplan de E rencontre $GL_n(K)$.

1.6.2 Des pseudo valeurs propres (43)

Soit $A \in M_n(K)$. Déterminer l'ensemble des $(a_1, ..., a_n) \in K^n$ tel que A soit semblable à une matrice de diagonale $(a_1, ..., a_n)$.

1.6.3 Des nombres premiers ! (44)

Soit p premier et $E := M_n(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que $\mathrm{Tr}\ (A+B)^p = \mathrm{Tr}\ A^p + \mathrm{Tr}\ B^p (\mathrm{mod}\ p)$.
2. Montrer que $\mathrm{Tr}\ A^p = \mathrm{Tr}\ A (\mathrm{mod}\ p)$.

1.6.4 Théorème de Burnside (45)

Soit G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini, c'est-à-dire tel que $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall g \in G, g^n = Id$
On pose m la dimension de $\mathrm{Vect}(G)$ et M_i des éléments de G en formant une base.
À l'aide de l'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C}^m \\ A & \mapsto & Tr(AM_i)_{1 \leq i \leq m} \end{array} \right.$$

Montrer que G est un groupe fini.

1.6.5 Une petite astuce (46)

Soient 2 matrices A et B telles que $A + B = AB$. Montrer que A et B commutent.

1.6.6 Un classique (***) (47)

Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})$. Supposons $A^2B = A$ et $\mathrm{rg}\ A = \mathrm{rg}\ B$.
Montrer que $B^2A = B$. *(On pourra montrer d'abord que Im* $A \oplus \ker A = \mathbb{R}^n$*)*

1.6.7 Caractérisation des matrices de trace nulle (48)

- Montrer qu'une matrice est de trace nulle ssi elle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
- Montrer qu'une matrice est de trace nulle ssi s'écrit comme un crochet de Lie.

1.6.8 Généralisation de Vandermonde (49)

Soit $0 < t_1 < ... < t_n$. Soit $\alpha_1 < ... < \alpha_n$. Montrer que $\det((t_i^{\alpha_j})_{i,j}) > 0$. On montrera d'abord que pour tout $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sum_i a_i x^{\alpha_j}$ s'annule au plus $n - 1$ fois.

1.6.9 Oral Mines 2017(***) (50)

Étudier l'équation $A = \mathrm{Com}(M)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M étant l'inconnue.

1.6.10 Inversibilité, positivité(***) (51)

Caractériser les matrices inversibles de $A \in M_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs tel que A^{-1} est à coefficients positifs.

1.6.11 Déterminant d'une matrice stochastique (52)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique (i.e. à coefficients positifs et la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1). Montrer que $|\det A| \leq 1$. Caractériser les cas d'égalité.

1.6.12 Déterminant en blocs (53)

Calculer le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ avec C et D qui commutent. On commencera par traiter le cas où D est inversible.

1.7 Réduction d'endomorphismes

1.7.1 Réduction basique (54)

Soit $(a_1...a_n) \in K^n$. On pose $A := [a_1...a_{n-1}]$. On pose $M := \begin{bmatrix} O & A^T \\ A & a_n \end{bmatrix}$. Donner une CNS pour que M soit diagonalisable.

1.7.2 Polynôme caractéristique (55)

On pose $A_0 := [1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} := \begin{bmatrix} A_n & A_n \\ A_n & -A_n \end{bmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de A_n.

1.7.3 Matrices circulantes (56)

Soit $F \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. On considère $\Phi : P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \mapsto$ reste de la DE de $F \times P$ par $X^n - 1$. Montrer que Φ est bien défini et linéaire. Écrire sa matrice dans la base canonique. Déterminer ses valeurs et vecteurs propres. A quelle condition elle est diagonalisable ?

1.7.4 Lemme de Hadamard (57)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On pose : $\forall i \in [\![1, n]\!], R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

1. Montrer que si $\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{ii}| > R_i$, alors A est inversible.
2. Montrer que Sp $A \in \bigcup_i \overline{D}(a_{ii}, R_i)$
3. Montrer que si $\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{ii}| > R_i$, alors $|\det A| \geq \prod_i (|a_{ii}| - R_i)$
4. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et que $\forall i \in [\![1, n]\!], a_{ii} > R_i$, alors $\det A \geq \prod_i (|a_{ii}| - R_i)$

1.7.5 Cayley-Hamilton en pratique(*) (58)

Soit $n \in N$. Montrer qu'il existe $(a_o, \ldots, a_{n-1})$ un n-uplet réel tel que, $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$P(X + n) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i P(X + i) = 0$$

Exhiber une telle famille.

1.7.6 Rayon spectral(**) (59)

Montrer que $||A^n||^{\frac{1}{n}} \to \rho(A)$.

1.7.7 Det et nilpotents(*) (60)

Soit N une matrice nilpotente qui commute avec A matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(A + N) = \det(A)$.

1.7.8 Caractérisation de la nilpotence(**) (61)

Soit u un endomorphisme de E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n.
Montrer que u est nilpotent si et seulement si $\forall 1 \leq k \leq n, \mathrm{Tr}(u^k) = 0$.

1.7.9 Carré triangulaire(**) (62)

Donner une condition nécessaire pour que la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable, avec A et B qui commutent.

1.7.10 Convergence en puissance(**) (63)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'on a l'équivalence entre :
— $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$
— $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), |\lambda| < 1$

1.7.11 Réduction simultanée(**) (64)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux.

1. Montrer qu'il existe une base dans laquelle ils sont tous diagonaux.
2. Même question lorsqu'ils sont simplement trigonalisables, pour la trigonalisation.

1.7.12 Endomorphismes diagonalisables (65)

1. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Montrer que f est diagonalisable ssi f^2 est diagonalisable et $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$
2. Que dire si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?
3. Exemple : CNS pour que $\begin{bmatrix} (0) & & a_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_n & & (0) \end{bmatrix}$ soit diagonalisable (cas complexe puis réel).

1.7.13 Exercice de Diego(**) (66)

Quand est-ce que l'équation $A^2 + 2A + 5I_d = 0$ admet des solutions dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

1.7.14 Généralisation de petit Fermat(***) (67)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et p premier. Montrer que $\mathrm{tr}(A^p) = \mathrm{tr}(A)$ dans $\mathbb{F}_p$.

1.7.15 Caractérisation en hyperplans(***) (68)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que f est diagonalisable si et seulement si il existe des hyperplans $H_1, ..., H_n$ stables par f tels que $\bigcap_{i=1}^n H_i = \{0\}$.

1.7.16 Propagation de l'inversibilité(***) (69)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que $A, A+B, A+2B, A+3B, A+4B$ sont inversibles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Montrer que $A+5B$ l'est aussi.

1.7.17 Lemme de Serre(***) (70)

Soit G un sous-groupe fini de $GLn(\mathbb{Z})$ et p un nombre premier impair. Montrer que l'application

$$GL_n(\mathbb{Z}) \to GL_n(\mathbb{F}_p)$$

induite par le morphisme de congruence $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ restreinte à G est injective.

1.7.18 Exposant uniforme de nilpotence de matrices à coefficients entiers(****) (71)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\exists\, p \in \mathbb{N}^*, A^p = I_2$.
   Montrer qu'on a $A^{12} = I_2$.
2. Montrer le même résultat dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.
3. Montrer que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, on peut aussi trouver un exposant uniforme comme 12 pour $n = 2$.

1.7.19 Adhérence et intérieur des matrices diagonalisables(***) (72)

Déterminer l'adhérence et l'intérieur des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1.7.20 Adhérence des racines p-ième (73)

Déterminer l'adhérence de $\Omega = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \exists p \in \mathbb{N}^* : M^p = I_n\}$.

1.7.21 Supplémentaire stable par un endomorphisme nilpotent (74)

Soit f un endomophisme nilpotent de E, K-ev de dimension finie. Soit V un sev stable par f. Montrer que V admet un supplémentaire stable ssi $\forall k \in \mathbb{N}, f^k(V) = f^k(E) \cap V$.

1.7.22 Oral Ulm(****) (75)

Soient A et B deux matrices de $M_n\mathbb{C}$, $n \geq 2$. Montrer qu'il existe $\sigma \in S_n$ et $e_1, \ldots, e_n$ base de $\mathbb{C}^n$ telles que :
— La matrice de A dans $e_1, \ldots, e_n$ soit triangulaire supérieure.
— La matrice de B dans $e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}$ soit triangulaire supérieure.

1.8 Espaces euclidiens

1.8.1 Diagonale homothétique (76)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exists P \in O_n(\mathbb{R}) : P^T AP$ a tous les termes diagonaux égaux. On pensera à se ramener au cas $A \in S_n(\mathbb{R})$.

1.8.2 Rangeons les valeurs propres ! (77)

Soit $A, B \in S_n(\mathbb{R})$. On pose $(\lambda_i(M))_i$ les valeurs propres associées à M symétrique, avec multiplicité, rangées dans l'ordre décroissant.

1. Montrer que $\lambda_1(A + B) \leq \lambda_1(A) + \lambda_1(B)$.
2. Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A + B) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A) + \lambda_i(B)$.

1.8.3 Rayon spectral (78)

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ à coefficients > 0. On pose ρ le maximum de $|\text{Sp } A|$. Montrer que ρ est une valeur propre simple et que $E_\rho(A)$ est engendré par un vecteur à coefficients > 0.

1.8.4 Produit scalaire, matrice symétrique (79)

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On considère $f : X \in \mathbb{R}^n \longmapsto \|SX\|^2 - < SX, X >^2$

1. Est-ce que f est minorée ?
2. A quelle condition f est majorée ? Donner son sup dans $\mathbb{R}^n$ dans ce cas.

1.8.5 X Even 2017 (80)

(***) Soit R une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que c'est un état si elle est symétrique, positive et de trace 1.

1. Soit v un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$, on note P_v le projecteur orthogonal sur la droite qu'il engendre. Soit A dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $Tr(AP_v) = \langle Av, v\rangle$
2. Montrer que R s'écrit comme une combi convexe de P_{v_i} où les v_i forment une bon de $\mathbb{R}^n$.
3. R est un état pur si un seul des lambdas de la combi convexe est non nul. C'est quoi un état pur ? (Attention celle la très dure)
4. Montrer que R état pur ssi il existe v tel que $Tr(RP_v) = 1$
5. Montrer que R état pur ssi $Tr(R^2) = 1$.
6. Caractériser les états purs dans $M_2(\mathbb{R})$ (les exprimer sous forme matricielle quoi)

1.8.6 Introduction aux Ondelettes(**) (81)

On pose

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit $\varphi_{j,n} = 2^j \varphi(\frac{\cdot - 2^{-j}n}{2^{-j}})$ et $\psi_{j,n} = 2^{j/2} \psi(\frac{\cdot - 2^{-j}n}{2^{-j}})$

1. Vérifier que $\forall j$, les $(\varphi_{j,n})_{0\leq n<2^j}$ sont une base orthonormale de l'espace qu'elles engendrent, V_j.
2. On pose W_j l'espace engendré par les $(\psi_{j,n})_{0\leq n<2^j}$. Montrer que $V_j \oplus^\perp W_j = V_{j+1}$
3. En déduire que $V_0 \bigoplus_{j<j_0} W_j = V_{j_0}$.
4. Exprimer $\psi_{j,n}$ selon les $\varphi_{j+1,n}$.
5. Quel peut-être l'intérêt d'une telle écriture ?

1.8.7 Spectre et inversion positive(***) (82)

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Supposons $\mathrm{Sp}(I_n - A) \in \mathbb{R}_+^*$ et que $\forall p \in \mathbb{N}, \mathrm{Tr}\ A^p \geq 0$. Montrer que $\mathrm{Sp}\ A \subset]-1,1[$.
2. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs. Supposons $\mathrm{Sp}\ (I_n - A) \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $(I_n - A)^{-1}$ à coefficients positifs.

1.8.8 Un produit scalaire(**) (83)

1. Montrer que sur $C^1([-1,1],\mathbb{R})$, l'application
$$f, g \mapsto \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
est un produit scalaire.
2. Montrer qu'il existe une unique suite Q_n de polynômes unitaire orthogonaux échelonnés
3. Calculer les 3 premiers Q_i
4. Montrer que Q_i a exactement i racines distinctes dans $]-1,1[$
5. Étudier la parité des Q_n

1.8.9 Décomposition d'Iwasawa(***) (84)

Montrer que tout élément M de $SL_2(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique
$$M = NAK$$
où N est de la forme
$$N = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ , où } x \in \mathbb{R}$$
$$A = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \text{ , où } y > 0$$
et K $\in SO_2(\mathbb{R})$

1.8.10 Groupes orthogonaux égaux(**) (85)

Soit E un $\mathbb{R}-$ ev muni de deux normes euclidiennes $||\cdot||_a$ et $||\cdot||_b$ telles que leurs groupes orthogonaux sont égaux. Que dire de ces normes ?

1.8.11 Densité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{Q})$(**) (86)

Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1.8.12 Linéarité orthogonale (***) (87)

Soit E un $\mathbb{R}-ev$ de dimension finie. Caractériser les $f : E \to \mathbb{R}$ continues telles que
$$u \perp v \implies f(u+v) = f(u) + f(v)$$

1.8.13 Maths B 2018(***) (88)

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
Pour $j \in \mathbb{N}$, on définit $P_j(X) = \frac{1}{2^j j!}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}X^j}[(X^2-1)^j]$ et $P_0 = 1$.

1. Quel est le degré de P_j ? Sa parité ? Calculer sa valeur en 1.
2. Montrer que la famille des $(P_j)_{0\leq j\leq n}$ est orthogonale.
3. Montrer que les P_{2j} (resp. P_{2j+1}) constituent une base des polynômes pairs (resp. impair) de $\mathbb{R}_n[X]$.

1.8.14 Exponentielle de matrices symétriques(****) (89)

Montrer que l'application
$$\left\{\begin{array}{lll} S_n & \to & S_n^{++} \\ A & \mapsto & e^A \end{array}\right.$$
est bien définie et est une bijection.

1.8.15 Réduction des matrices antisymétriques(**) (90)

Montrer que les matrices antisymétriques sont, dans une bonne base orthonormée, par blocs, de la forme suivante :
$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & \dots \\ -a_1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

1.8.16 Méthode de Gauss(**) (91)

On considère un produit scalaire quelconque sur les polynômes.

1. Montrer qu'il existe une suite orthonormée $(P_n)_n$ telle que $\deg P_n = n$.
2. Montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_n)$ et $(b_0, \dots, b_n)$ tels que $\forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\langle P, 1\rangle = \sum_{i=0}^n b_i P(a_i)$

1.8.17 Diagonalisation orthogonale simultanée(**) (92)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes symétriques qui commutent 2 à 2.
Montrer qu'ils sont tous diagonalisables dans une même base orthogonale.

1.8.18 Exponentielle de matrices antisymétriques(****) (93)

Montrer que l'application
$$\left\{\begin{array}{lll} A_n & \to & SO_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & e^A \end{array}\right.$$
est une bijection.

1.8.19 Césaro d'une matrice orthogonale(***) (94)

Soit M une matrice orthogonale. Que dire de la convergence de la suite $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^n M^i$?

1.8.20 Famille de Bessel(**) (95)

Soit E un espace euclidien, et $(e_1, \dots, e_n)$ des vecteurs tels que $\forall x \in E$,
$$||x||^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle^2$$

1. On suppose les e_i unitaires. Montrer qu'ils forment une bon.
2. Supposons maintenant que dim $E = n$. Montrer qu'ils forment une base.
3. Donner une expression de $\langle x, y\rangle$ suivant les e_i.
4. Montrer que la matrice de Gram G est idempotente, càd $G^2 = G$. Conclure.

1.8.21 Produit de deux matrices symétriques définies positives (***) (96)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques positives.

1. On suppose de plus que A est définie positive. Montrer que AB est diagonalisable et que son spectre est contenu dans $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement A positive

1.8.22 Équivalences(***) (97)

1. Montrer que A est une matrice définie positive si et seulement si il existe une matrice inversible P telle que $A = P^tP$
2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice définie positive S telle que ${}^tA = S^{-1}AS$

1.8.23 Factorisation abusive... ou pas !(***) (98)

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme T_N tel que

$$T_N(\sin(x)) = \sin((2N+1)x)$$

2. Montrer qu'on a

$$T_N(\xi) = (2N+1)\xi \prod_{1\leq k\leq N}(1 - \frac{\xi^2}{\sin(\frac{k\pi}{2N+1})})$$

3. En déduire que $\sin(\pi x) = \pi x \prod_{k\geq 1}(1 - \frac{x^2}{k^2})$.
4. En déduire, à partir de la formule de Weierstrass, la forme des compléments :

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \Gamma(x)\Gamma(1-x)$$

1.8.24 Multiplicité chez un polynôme irréductible(**) (99)

Soit K un corps, P un polynôme irréductible de $K[X]$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) P admet une racine multiple.
(ii) P et P' ne sont pas premiers entre eux.
(iii) K est de caractéristique finie p et $P(X) = g(X^p)$.
(iv) Toutes les racines de P sont multiples.

1.8.25 Mines 2019(***) (100)

Soient P et Q deux polynômes dans $\mathbb{Z}[X]$ premiers entre eux.
Montrer que la suite $n \mapsto PGCD(Q(n), P(n))$ est périodique.

1.8.26 $P \geq 0$(***) (101)

1. Montrer que P est un polynôme positif sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \exists A$ et $B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.
2. Montrer que P est un polynôme positif sur $\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \exists A$ et $B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + XB^2$.

1.8.27 $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$(***) (102)

Que dire d'un polynôme P tel que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$? Et pour une fraction rationnelle ?

1.8.28 Polynômes cyclotomiques(***) (103)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $\Omega_n = \{\xi \in \mathbb{C}, \xi^n = 1, \xi^d \neq 1 \, \forall d < n \}$
Les polynômes cyclotomiques sont définis de la façon suivante :

$$\Phi_n = \prod_{\xi\in\Omega_n}(X - \xi)$$

1. Calculer Φ_p pour p premier.
2. Montrer que $\sum_{d|n}\varphi(d) = n$
3. Montrer que les polynômes cyclotomiques sont à coefficients entiers.
4. On considère la fonction de Möbius μ. Montrer que

$$\Phi_n = \prod_{d|n}(X^{\frac{n}{d}} - 1)^{\mu(d)}$$

2 Analyse

2.1 Familles sommables et séries numériques

2.1.1 Un peu de calcul (104)

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$.

1. On suppose que $\sum a_n$ converge. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}$ existe et comparer sa valeur à $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.
2. On suppose que $\sum \sqrt{n} a_n$ converge. Pour $n \geq 0$, on pose $w_n := \sum\limits_{p=n}^{+\infty} a_p^2$. Montrer que w_n existe et étudier la convergence de $\sum \sqrt{\frac{w_n}{n}}$.

2.1.2 Une majoration subtile (105)

Montrer que : $\exists K > 0 : \forall (a_n)_{n\geq 1} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$ tel que $\sum \frac{1}{a_n}$ converge, on a : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + \ldots + a_n} \leq K \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.

On prouvera d'abord que $\forall a_1, ..., a_n > 0$, $\frac{n}{a_1+\ldots+a_n} \leq \frac{4}{n(n+1)^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}$

Quelle est la meilleure constante K possible ? (Réponse : 2)

2.1.3 Convergence de séries explicites (106)

Etudier la convergence de $\sum u_n$ avec :

— $u_n := \frac{1+1/2+\ldots+1/n}{\ln n!}$ pour $n \geq 2$

— $u_n := (n \sin(\frac{1}{n}))^{n^\alpha}$ pour $n \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

— $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par récurrence : $u_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n^\alpha}$

2.1.4 Exercice (107)

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite à coefficients positifs tel que $\sum a_n$ converge. Montrer que $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > \frac{1}{2}$ (#Cauchy-Schwarz). Que dire si $\alpha = \frac{1}{2}$?

2.1.5 Exercice (108)

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ tel que $\frac{f'}{f} \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. On s'intéresse à la série $\sum f(n)$. Montrer qu'elle converge et donner un équivalent du reste. Réponse : $R_n \sim f(n)$

2.1.6 Un calcul difficile (à part pour Coco) d'équivalent (109)

Soit (a_n) une suite réelle tel que $a_n \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^2 \to 1$. Déterminer un équivalent de (a_n).

2.1.7 Critère de condensation de Cauchy (110)

Soit (u_n) décroissante positive.

1. Pour $p \geq 2$ entier, montrer que $\sum u_n$ converge ssi $\sum p^n u_{p^n}$ converge.
2. En déduire que $\sum u_n$ converge ssi $\sum \min(u_n, 1/n)$ converge.

2.1.8 Variante de Césaro(*) (111)

Montrer que si $a_n \to l \in \mathbb{R}$, alors

$$\frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i \to l$$

2.1.9 Une application (*) (112)

Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer qu'on a :

$$\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1} \tau(n) x^n$$

où τ est la fonction nombre de diviseurs.

2.1.10 Pour les cancres...(**) (113)

On considère la famille $\{\frac{1}{p^2q^2} \in \mathbb{N}^2, (p,q)=1\}$. Montrer qu'elle est sommable puis calculer sa somme.

2.1.11 Série de sh(**) (114)

Déterminer une expression simple de la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\operatorname{sh}(2^n x)}$$

2.1.12 Produit Eulérien(**) (115)

Montrer le produit eulérien de la fonction ζ, pour $\operatorname{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

2.1.13 Sommabilité (**) (116)

Quelle est la nature de la famille $\{\frac{1}{pq(p+q)}, p, q \geq 1\}$?

2.1.14 Théorème de réarrangement de Riemann(***) (117)

Soit $\sum a_n$ une série semi convergente. Montrer qu'en permutant les termes, on peut faire tendre la série vers n'importe quelle valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$.

2.1.15 Mines RMS 2018(**) (118)

Existe-t-il une suite $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$\sum_{n\geq 0} a_n^k = \frac{1}{k^2}\ ?$$

2.1.16 Sommes des inverses des nombres premiers(**) (119)

Montrer que $\sum\limits_{p\in\mathcal{P}\leq n} \frac{1}{p}$ diverge quand $n \to \infty$.

Bonus En admettant le théorème des nombres premiers, montrer que $\sum\limits_{p\in\mathcal{P}\leq n} \frac{1}{p} \sim \ln(\ln(n))$.

2.1.17 Conséquence du théorème des nombres premiers(**) (120)

On admet le théorème des nombres premiers : $\pi(n) \sim \frac{n}{\ln(n)}$

1. Montrer que $p_n \sim n\ln(n)$
2. On pose $d_n = p_{n+1} - p_n$.
   Montrer que

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{d_i}{\ln(i)} \sim n$$

2.1.18 Mines Tchouboukoff 2019(***) (121)

On pose $x_1 > 0$ et on définit par récurrence la suite x_n par induction : $x_{n+1} = x_n + \frac{n}{x_n}$.

1. Montrer que pour $n \geq 2$, $x_n > n$.
2. Montrer que la suite $x_n - n$ converge.
3. On pose $y_n = n(x_n - n)$. Montrer que $\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + O(\frac{1}{n^2})$.
4. En déduire un développement à l'ordre 3 de x_n.

2.1.19 Une suite récurrente(***) (122)

Trouver un équivalent en ∞ de la suite réelle u_n définie de la façon suivante :

$$u_0 > 0$$
$$u_{n+1} = u_n + (u_n)^2$$

2.1.20 Simili TAN(***) (123)

On définit $P(n) = \max\{p \text{ premier}, p|n\}$.
Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{nP(n)}$ converge.

2.1.21 Une autre suite récurrente(***) (124)

On considère u_n définie, pour u_0 quelconque, par :

$$u_{n=1} = u_n + e^{-u_n}$$

1. Déterminer un équivalent de u_n.
2. Pousser le développement asymptotique jusqu'au 3ème terme.

2.1.22 Encore une suite récurrente !(***) (125)

On définit par récurrence la suite(u_n) suivante :

$$u_{n+1} = |n - u_n|$$

Déterminer un équivalent simple de u_n.

2.1.23 Un minorant pour o dont la série diverge ?(***) (126)

Soit $\sum a_n$ une série divergente à termes positifs.
Montrer qu'il existe $b_n = o(a_n)$ positive de somme divergente.

2.2 Convexité

2.2.1 Inégalité classique de concavité(*) (127)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ concave, nulle en zéro. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

2.2.2 Ensembles convexes et intersection(**) (128)

1. Montrer que tout hyperplan affine est convexe.
2. On pose
$$S = \{x \in \mathbb{R}^m, |p(t)| \leq 1 \text{ pour tout } t, |t| \leq \frac{\pi}{3}\}$$
avec $p(t) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cos(mt)$ Montrer que S est convexe.

2.2.3 Sur les Polytopes(**) (129)

On dit qu'un polytope convexe de $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. On dit qu'un hyperplan affine $h = \{x \in \mathbb{R}^n | a \cdot x + b = h(x) = 0\}$ *supporte* un polytope $\mathcal{P}$ lorsque $\mathcal{P} \cap h \neq \emptyset$ et que $\forall x \in \mathcal{P}$, $h(x) \geq 0$ ou $h(x) \leq 0$.

1. Montrer que si h supporte un polytope $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{P} \cap h$ est aussi un polytope.
2. En déduire qu'un polytope a un nombre fini de faces.
3. Montrer qu'un polytope est engendré par ses sommets (ses faces réduites à un points).

2.2.4 Généralisation à $\mathbb{R}^n$(**) (130)

Soit S une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1. Donner une définition logique de la convexité dans ce contexte.
2. Montrer que f est convexe si et seulement si $t \mapsto f(x + tv)$ est une fonction convexe classique sur l'intervalle où elle est définie.

2.2.5 Convexité dyadique(**) (131)

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Montrer que f est convexe.
Indication : Récurrence pour montrer le résultat pour les $\lambda \in D$ (D étant l'ensemble des dyadiques de $[0, 1]$). On utilise ensuite la continuité de f et la densité de D dans $[0, 1]$.

2.2.6 Intégralement convexe (**) (132)

Soit f convexe $I \to \mathbb{R}$. Soient a et $b \in I$. Montrer que

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

2.2.7 Convexité logarithmique(**) (133)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\ln \circ f$ est convexe si et seulement si f^α l'est pour tout $\alpha > 0$.

2.2.8 Opérations sur les fonctions(**) (134)

1. Soient f et g des fonctions convexes positives croissantes (ou toutes deux décroissantes). Montrer que fg est encore une fonction convexe.
2. Soient f et g positives concaves, f croissante, g décroissante. Montrer que fg est concave.

2.2.9 X 2017(***) (135)

Soit f une fonction convexe dérivable. Montrer que

$$0 \leq \frac{f(0)}{2} + f(1) + \cdots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} - \int_0^n f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{f'(n)-f'(0)}{8}$$

2.2.10 Inégalité de Karamata(**) (136)

Définition : on dit qu'un n-uplet $x = (x_1, \ldots, x_n)$ **majore** $y = (y_1, \ldots, y_n)$ lorsque, avec σ_x et σ_y deux permutations qui les rendent décroissantes, on a, en posant $X_i = \sum_{k=1}^{i} x_{\sigma_x(k)}$ et Y_i la même chose pour pour y, $X_i \geq Y_i \; \forall \, 1 \leq i \leq n$.

Soit f une fonction convexe $I \to \mathbb{R}$. Montrer que si x majore y et que $X_n = Y_n$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$$

2.2.11 Inégalité de Popoviciu(**) (137)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que $\forall \, x, y, z \in I$,

$$\frac{2}{3}[f(\frac{x+y}{2}) + f(\frac{z+y}{2}) + f(\frac{x+z}{2})] \leq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$$

2.2.12 Transport optimal discret(***) (138)

On cherche à envoyer n points $(x_i) \in \mathbb{R}^n$ vers n autres points $(y_i) \in \mathbb{R}^n$. Chaque couplage $(x_i \to y_j)$ a un coût $h(x_i - y_j)$, où h est une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ convexe.
Le problème de transport

2.2.13 Convexité et fonction inverse(****) (139)

Montrer que $x \mapsto xf(x)$ est convexe si et seulement si $x \mapsto f(\frac{1}{x})$ l'est.

2.2.14 Panis Ulm(****) (140)

Soit f une fonction positive continue qui tend vers 0.
Montrer qu'il est possible d'avoir g convexe telle que $f \leq g$ et $g(t) \to 0$.

2.3 Espaces vectoriels normés

2.3.1 Norme sur les polynômes (*) (141)

Soit $A \subset \mathbb{R}$. À quelles conditions $\sup_{z \in A} |P(z)|$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$?

2.3.2 Semi-normes invariantes par similitude (***) (142)

1. Pour $n \geq 2$, montrer qu'il n'existe pas de norme sur $M_n(\mathbb{R})$ invariante par similitude.
2. Montrer que $A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto |\mathrm{Tr}(A)|$ est une semi-norme invariante par similitude.
3. Caractériser les semi-normes de $M_n(\mathbb{R})$ invariantes par similitude.

2.3.3 Intérieur d'un sous-espace vectoriel normé(*) (143)

Montrer qu'un sous-espace vectoriel normé d'intérieur non vide est l'espace vectoriel tout entier.

2.3.4 Surjectivité et topologie (**) (144)

Soit $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Montrer que f est surjective si et seulement si l'image de tout ouvert est un ouvert.

2.3.5 Séparation de deux fermés(***) (145)

Soient A et B deux fermés d'un espace vectoriel normé $(E, ||.||$.

1. Démontrer que $A \cap B = \emptyset$ est équivalent à $\forall x \in E, d(x, A) + d(x, B) > 0$.
2. On suppose que A et B sont disjoints. Montrer qu'il existe $f : E \to \mathbb{R}$ fonction continue telle que f restreinte à A soit constante égale à 1, et f restreinte à B soit constante égale à 0.
3. En déduire qu'il existe U et V deux ouverts tels que A inclus dans U et B dans V, et $V \cap U = \emptyset$

2.3.6 Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est union dénombrable d'intervalles(***) (146)

1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une union d'intervalles disjoints.
2. Montrer que cette union est dénombrable.
3. Montrer que F dans $\mathbb{R}$ est fermé si et seulement si il existe f continue de telle que $F = f^{-1}(\{0\})$

2.3.7 Quelques parties de l'ensemble des suites bornées(***) (147)

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme infinie. Déterminer si les ensembles suivants sont fermés :

1. $A = \{$ Suites croissantes $\}$
2. $B = \{$ Suites convergeant vers $0\}$

2.3.8 Exercice (148)

On pose $E := C([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\| - \|_1$. Soit $\varphi \in E$. Soit

$$\phi : f \in E \mapsto (x \in [0,1] \mapsto \int_0^x \varphi f)$$

Montrer que ϕ est un endomorphisme continu de E. Déterminer sa norme triple.

2.3.9 Densité et valeurs d'adhérence (149)

Montrer que $\{\cos(\ln(n)), n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[-1, 1]$. On pourra démontrer que pour u et v deux suites réelles qui tendent vers $+\infty$ et tel que $u_{n+1} - u_n \to 0$, on a que $\{u_n - v_p, (n,p) \in \mathbb{N}^2\}$ dense dans $\mathbb{R}$.

2.3.10 Propriétés des valeurs d'adhérence(***) (150)

Soit (u_n) une suite réelle.

— Supposons que $u_{n+1} - u_n \to 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle.

— Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Soit $(u_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si $u_{n+1} - u_n \to 0$.

2.3.11 Intérieur d'un sous-espace vectoriel normé(*) (151)

Montrer qu'un sous-espace vectoriel normé d'intérieur non vide est l'espace vectoriel tout entier.

2.3.12 Théorème de Riesz(***) (152)

Montrer qu'un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

2.3.13 Distance ultramétrique(**) (153)

On définit une valeur absolue comme étant *ultramétrique* lorsque $|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$. et telle que $|xy| = |x| |y|$.

1. Soit $v_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N}, p^k | n\}$. On pose $|n|_p = p^{-v_p(n)}$. Montrer que c'est une valeur absolue ultramétrique pour p premier.
2. Montrer que dans un espace ultramétrique, une suite $\sum a_n$ converge si et seulement si a_n tend vers 0.
3. *(Interprétation géométrique)* Montrer que dans un espace ultramétrique, tout triangle est isocèle.

2.3.14 Composition monotone(**) (154)

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ monotone, et soit $x \in [0,1]$. Montrer que la suite $f^{\circ(n)}(x)$ a au plus 2 valeurs d'adhérences.

2.4 Compacité, connexité par arcs et dimension finie

2.4.1 Connexité basique (*) (155)

Soit $n \geq 2$. Existe-t-il une fonction continue injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$?

2.4.2 Théorème du point fixe(***) (156)

Soit E un espace vectoriel normé et K compact non vide de E. Soit $f : K \to K$ tel que f soit contractante : $\forall x \neq y \in K, \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$. Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in K$. Montrer que, pour toute suite (x_n) tel que $x_0 \in K$ et $\forall n, x_{n+1} = f(x_n)$, on ait : $x_n \to \alpha$.

2.4.3 Un exercice décontractant(**) (157)

Soit E un evn et K compact non vide dans E. Soit $f : K \to K$ tel que f soit une dilatation : $\forall x, y \in K, \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$. Soit $a \in K$.

1. Montrer que, pour toute suite (x_n) tel que $x_0 = a$ et $\forall n, x_{n+1} = f(x_n)$, a est valeur d'adhérence de (x_n).
2. Montrer que f est une isométrie (i.e. conserve les distances) puis que f est bijective.

2.4.4 Stabilité linéaire des compacts(**) (158)

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et K compact dans E. On pose $\mathcal{L}_K := \{f \in \mathcal{L}(E) : f(K) \subset K\}$.

1. On suppose K d'intérieur non vide. Montrer que $\mathcal{L}_K$ est compact.
2. Caractériser les compacts K tel que $\mathcal{L}_K$ soit compact.

2.4.5 Ergodicité(***) (159)

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et K compact convexe non vide dans E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f(K) \subset K$. Pour $n \geq 1$, on pose $f_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^{\circ k}$

1. Montrer que $H := \bigcap_{n \geq 1} f_n(K) \neq \emptyset$.
2. Pour $x \in K$, montrer que $x \in H \Leftrightarrow f(x) = x$.

2.4.6 Plutôt deux fois qu'une (160)

Soit K un compact d'un evn E.

1. Pour s'échauffer, montrer qu'une suite à valeurs dans K converge ssi elle a une unique valeur d'adhérence.
2. Soit $f : K \to K$ continue. Soit (x_n) tel que $x_0 \in K$ et $\forall n, x_{n+1} = f(x_n)$. On suppose que (x_n) a 2 valeurs d'adhérence z_1 et z_2. Montrer que $\forall V_1 \in \mathcal{V}(z_1), \forall V_2 \in \mathcal{V}(z_2), \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, x_n \in V_1 \cup V_2$.
3. Soit φ une extractrice tel que $x_{\varphi(n)} \to l_1$. Étudier la suite $(x_{\varphi(n)+1})$ et envisager les différents cas.

2.4.7 Borel-Lebesgue (161)

1. Montrer qu'une partie compacte K d'un evn est précompacte, c'est-à-dire qu'elle admet pour tout ε un recouvrement fini de boules de rayon ε.
2. Soit $O_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de K. Montrer qu'il existe un $\alpha \geq 0$ tel que $\forall x \in K$, la boule $B(x, \alpha)$ soit incluse dans un des ouverts.
3. Montrer le théorème de Borel-Lebesgue : une partie d'un evn réel est compacte si et seulement si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini.

2.5 Intégrations

2.5.1 Exercice (162)

Etude de la convergence suivant $\alpha \in \mathbb{R}$ de :

- $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha}\, \mathrm{d}t$
- $\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x})\, \mathrm{d}x$

2.5.2 Intégrale d'une fraction rationnelle(***) (163)

Soit P et Q deux polynômes sur $\mathbb{C}$ tels que $\deg P \leq \deg Q - 2$.
Calculer, en fonction des pôles,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} \mathrm{d}t$$

2.5.3 Integrale de Dirichlet... ou presque !(**) (164)

L'intégrale $\int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x}\, \mathrm{d}x$ est-elle convergente ?
Indication : Au voisinage de $+\infty$, $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{(\sin x)^2}{x} + O(x^{-3/2})$

2.5.4 f et f'^2 intégrables(***) (165)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue intégrable.

1. Supposons que f soit uniformément continue. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
2. Supposons cette fois-ci que $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On ajoute l'hypothèse que f'^2 est intégrable. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2.5.5 Exo basé sur les rudiments de l'intégration (166)

Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que f ait une limite l en $-\infty$ et $\int_{\mathbb{R}_+} f$ converge. Justifier l'existence et calculer $\int_{\mathbb{R}} f(a+x) \; - \; f(b+x)\, dx$.

2.5.6 Méthode de Laplace(****) (167)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ C^∞. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$. Pour $\lambda > 0$, on pose

$$I(\lambda) = \int_0^1 (1-t^2)^\lambda f(t) \mathrm{d}t$$

Déterminer un équivalent de $I(\lambda)$ lorsque $\lambda \to \infty$.

2.5.7 Convergence L1(***) (168)

Soit f_n une suite de fonctions positives qui converge simplement vers f. Montrer qu'un a l'équivalence :

$$\int_{\mathbb{R}} |f - f_n| \to 0 \iff \int_{\mathbb{R}} f_n \to \int_{\mathbb{R}} f$$

2.5.8 Inégalités sur répartition Gaussienne(**) (169)

Montrer que, pour $x > 0$, on a :

1. $$(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3})e^{-x^2/2} \leq \int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x}e^{-x^2/2}$$

2. $$\int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t \leq Ce^{-x^2/2}$$

   où C est l'intégrale de Gauss.

2.5.9 Fonction Gamma et CVD(**) (170)

On pose

$$I_n = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^{n-1} \ln(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $I_n = H_n - \ln(n)$
2. En déduire que

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t)\mathrm{d}t = -\gamma$$

2.5.10 Convergence et TNP(**) (171)

On admet le théorème des nombres premiers sous une forme forte :

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^2}\right)$$

On veut montrer que la quantité $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^{1+i}}$ est bien définie.

1. Exprimer $\frac{1}{p^{1+i}}$ comme une intégrale.
2. Exprimer $\sum_{p\in\mathcal{P}\leq x} \frac{1}{p^{1+i}}$ en fonction de $\pi(x)$.
3. Déduire la convergence voulue.

2.5.11 Un calcul étrange (**) (172)

Obtenir

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x$$

sous la forme d'une somme.

2.5.12 Formule de Poisson(***) (173)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, intégrable, dérivable sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points. On suppose que f' est intégrable sur tous les intervalles sur lesquels elle est définie.
On pose $F(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)$

1. Montrer que F est bien définie et 1- périodique.
2. On admet que F admet en conséquence un développement en série de Fourier : $F(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{nt}$. On suppose que cette somme converge normalement. Donner une expression de a_n en fonction de la transformée de Fourier de f.
3. En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n)$.

2.6 Suites de fonctions

2.6.1 Fonctions caractéristiques de Gaussiennes (174)

1. Montrer que si la suite de fonctions $f_n : u \mapsto e^{ua_n}$ converge simplement, alors la suite a_n converge.
2. Montrer que si la suite de fonctions $f_n : u \mapsto e^{iu\mu_n + \frac{\sigma_n^2 u^2}{2}}$ converge simplement, alors elles convergent vers une fonction du type $f_n : u \mapsto e^{iu\mu + \sigma^2 u^2/2}$.

2.6.2 Au delà de Weierstrass (175)

1. Soit I un segment contenu dans $]0,1[$. Soit $\varphi : x \in I \mapsto 2x(1-x)$. Etudier la convergence simple puis uniforme de $(\varphi^{\circ n})_n$

2. En déduire que l'ensemble des fonctions polynomiales sur I à coefficients entiers est dense dans $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.

2.6.3 Convergence vers l'exponentielle (176)

1. Montrer que $\forall k \in [\![1,n]\!], \sum\limits_{j=0}^{k-1} j/n \geq 1 - \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}$
2. En déduire que $f_n : z \in \mathbb{C} \mapsto (1+z/n)^n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

2.6.4 X 2017 (Maths 2 Youyou) (177)

Soit $\lambda \geq 1$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que : $\exists P \in \mathbb{R}[X] \ : \ \forall x \in \mathbb{R}_+, |e^{-\lambda x} - e^{-x}P(x)| \leq \varepsilon$. On commencera par traiter le cas $\lambda \in [1,2]$.

2.6.5 Une preuve du théorème de Weierstrass(***) (178)

On pose

$$h_n = \begin{cases} \lambda_n(1-t^2)^n & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

de sorte que $\int_{-1}^{1} h_n = 1$. Soit f continue à support dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

1. Montrer que h_n est une approximation de l'unité, c'est à dire qu'on a :
   — h_n positif
   — $\int_{\mathbb{R}} h_n = 1$
   — $\forall \varepsilon > 0,, \int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n \to 0$ et$\int_{\varepsilon}^{\infty} h_n \to 0$
2. Montrer $f * h_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que sur cet intervalle, $f * h_n$ est une fonction polynômiale.
4. En déduire le théorème d'approximation de Weierstrass.

2.7 Calculs

2.7.1 Convolée du créneau (179)

On considère la foncton créneau f qui vaut 1 sur $[-1,1]$ et 0 sinon.
Calculer, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)\mathrm{d}y$$

2.7.2 Intégrale abélienne(**) (180)

Calculer

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$$

2.7.3 Calculs de primitives(**) (181)

Trouver une primitive de :
— $\frac{1}{\cos}$
— $\frac{1}{3+\cos(x)}$
— $\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}$

2.7.4 Intégrales de Wallis(**) (182)

On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos(x)^n \mathrm{d}x$. En déterminer un équivalent lorsque $n \to \infty$.

2.7.5 Développement asymptotique(**) (183)

Donner le développement jusqu'au k-ème terme de $Li(x)$

2.7.6 Développements limités(**) (184)

Donner le développement en 0 de :
— tan à l'ordre 5.
— $x \mapsto \sin(x)^{\sin(x)}$ jusqu'au 3 ème terme.
— $\frac{1}{\operatorname{sh}(x^2)} - \frac{1}{\sin(x^2)}$ jusqu'au 4ème terme.

2.8 Séries de fonctions

2.8.1 Comparaison série/Intégrale(**) (185)

Trouver un équivalent en 0 de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$, de $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}e^{-nx}$

2.8.2 Prolongement de ζ(**) (186)

Montrer que $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ se prolonge à $\mathbb{R}_*^+$. Donner sa valeur en 1.

2.8.3 L'Escalier du Diable(**) (187)

On considère une suite de fonctions $f_n : [0,1] \to [0,1]$ définie de la façon suivante :

(i) $f_0(x) = x$

(ii) f_1 est la fonction affine par morceaux la plus simple telle que $f_1(x) = \frac{1}{2}$ sur $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $f_1(0) = 0$ et $f_1(1) = 1$.

(iii) f_{n+1} se construit à partir de f_n en appliquant l'analogue de l'opération précédente à chaque partie affine non constant de f_n.

Montrer que la suite des f_n converge uniformément vers une fonction f. Montrer que la longueur des intervalles où f est constante vaut 1.

2.8.4 Continue mais non dérivable(**) (188)

On pose $f = \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

1. Montrer que f est continue.
2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

2.8.5 Séries de Dirichlet(**) (189)

On considère une suite a_n de réels et la fonction complexe

$$F(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

. (On écrit s $= \sigma + i\tau$).

1. Montrer que si la série converge pour σ_c, elle converge pour $\sigma > \sigma_c$.
2. Montrer qu'on a une convergence absolue a aussi lieu pour $\sigma > \sigma_a$.
3. Montrer qu'on a $\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1$

2.8.6 Convergence des séries de Dirichlet(***) (190)

On considère une écriture un peu plus générale des séries de Dirichlet :

$$F(s) = \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n s},\ \lambda_n \text{ strictement croissante qui tend vers } \infty.$$

Montrer que si la série converge en s_0, alors $\forall\, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, la série converge uniformément sur $\{s, |\arg(s - s_0)| \leq \theta\}$

2.8.7 Séries de Fourier(***) (191)

On pose $\mathcal{C}_{per}$ l'ensemble des fonctions continues 1-périodiques. Soit $f \in \mathcal{C}_{per}$. On pose $c_k(f) = \int_0^1 f(y)e_{-k}(y)\mathrm{d}y$. On pose $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$ et $\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n$.

1. Montrer que f est uniformément continue.
2. On pose $K_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e_k = x \mapsto \frac{1}{N+1}\frac{\sin(\pi x(N+1))^2}{\sin(\pi x)^2}$. Montrer que $\int_0^1 K_N = 1$.
3. Montrer que $\sigma_N(f)(x) = \int_0^1 f(x-y)K_N(y)\mathrm{d}y$.
4. En déduire que σ_N converge uniformément vers f.

2.8.8 Mines 2017(***) (192)

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(x+1)+f(x) = \frac{1}{x^2}, \forall x$ et de limite nulle en ∞.
2. Calculer $\int_1^\infty f$

2.8.9 Lemme de Borel(***) (193)

Le but de cet exercice est de montrer que pour toute suite réelle (c_n), il existe une fonction f infiniment dérivable telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = c_n$.

1. Montrer qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infiniment dérivable, nulle en dehors de $]-1, 1[$ et constante de valeur 1 dans un voisinage de 0.
2. En considérant une suite ε_n pertinente sur les fonctions

$$g_n : x \mapsto c_n \frac{x^n}{n!} \phi(\frac{x}{\varepsilon_n})$$

   montrer que la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ convient.

2.8.10 Formule d'Euler de la fonction cotangente(***) (194)

1. Montrer que la suite de fonction $f_n : x \mapsto \sum_{i=-n}^{n} \frac{1}{x+j}$ converge simplement vers une fonction f dont on précisera le domaine de définition.
2. Montrer que la foncion limite est continue sur tous les intervalles dont lesquels elle est définie.
3. Montrer qu'on a, lorsque c'est défini,

$$2f(2x) = f(x) + f(x + \frac{1}{2})$$

4. Montrer que $g : x \mapsto f(x) - \pi\text{cotan}(\pi x)$ se prolonge continûment sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que g est nulle.

2.8.11 Un développement en série de la valeur absolue(****) (195)

On définit f comme étant la fonction 1-périodique continue telle que
$f(x) = x^2$ si $|x| \leq \frac{1}{2}$.
On veut montrer qu'on a, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n f(\frac{x}{2^n})$$

1. Montrer que pour $\phi(2x) = 2\phi(x)$.
2. Montrer que pour $x \in]0, 1[$, montrer que $\phi(x+1) = 1 + \phi(x)$.
3. Conclure.

2.8.12 Éven Lyon 2017(****) (196)

Soit a_n et b_n deux suites denses dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe ϕ un C^1- difféomorphisme (c'est-à-dire une bijection C^1 dont la réciproque est C^1) telle que $\phi(\{a_n, n \in \mathbb{N}\}) \subset \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$.

2.8.13 Ressemble à du Fourier (197)

Soit $T > 0$ et $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ continue.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$, on pose $g_n(t) := \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^T f(u) \exp(-kn(t-u))du$. Étudier la limite simple de $(g_n)_n$.
2. On suppose $(\int_0^T f(t) \exp(nt)dt)_n$ bornée. Que déduire sur f ?

2.8.14 Intégration et somme ponctuelle(****) (198)

Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues. On suppose que la série $\sum \int_a^b |f_n|$ converge.

1. Peut-on dire que pour tout $t \in [a,b]$, la série $\sum |f_n(t)|$ converge ?
2. Montrer que l'ensemble des $x \in [a,b]$ tels que la série $\sum |f_n(x)|$ converge est dense dans $[a,b]$.
3. Construire une suite (f_n) vérifiant les hypothèses de l'énoncé tel que l'ensemble

$$\{x \in [a,b], \sum |f_n(x)| \text{ diverge}\}$$

est dense.

2.8.15 CVS sans CVU sur aucun intervalle ouvert non vide(***) (199)

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tel que $f = 0$ sur $\mathbb{R}_- \cup [2/n, +\infty[$, $f(1/n) = 1$ et f affine sur $[0, 1/n]$ et sur $[1/n, 2/n]$. Soit $k \in \mathbb{N}^* \mapsto r_k$ une bijection vers $\mathbb{Q}$. On pose $g_n(t) := \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{f_n(t-r_k)}{2^k}$.

1. Étudier la continuité de g_n.
2. Étudier la CVS, la CVU et la CVU sur tout segment de (g_n).

2.9 Séries entières

2.9.1 Un peu de calcul (200)

1. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ (Réponse : $\frac{\pi}{4}$)
2. Convergence et somme de : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$ (Réponse : $\frac{\pi^2}{16}$)

2.9.2 De la combinatoire (201)

Soit $a_1, ..., a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble. Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n := |\{(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{N}^k : a_1x_1 + ... + a_kx_k = n\}|$$

Donner un équivalent de u_n en $+\infty$. On pourra considérer : $\prod\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{1-z^{a_i}}$.

2.9.3 Équivalence DSE (202)

Soit I intervalle ouvert et $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. Montrer qu'il y a une équivalence entre :
— f est analytique sur I.
— $\forall J \subset I$ segment, $\exists C, r > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J, |f^{(n)}(x)| \leq Cr^n n!$

2.9.4 Exercice (203)

On pose $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose que RCV ≥ 1 et que : $\forall n, a_n \in \mathbb{R}$ et f est injective sur $D = \{z : |z| < 1\}$.

1. Soit $z \in D$. Montrer que $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}$. En déduire que $\mathrm{Im}(z) \geq 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(f(z)) \geq 0$.
2. Soit $r \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\int\limits_0^\pi \mathrm{Im}(f(re^{i\theta})) \sin(n\theta) d\theta$. Montrer que $\forall n \geq 1, |a_n| \leq n$.
3. Montrer que la majoration obtenue est optimale.

2.9.5 Les séries entières sont loin de décrire toutes les fonctions C infini (****) (204)

1. Montrer qu'il existe f C^∞ telle que f est positive, vaut 1 sur $[0,1]$ et a son support inclus dans $[-1,2]$.
2. Soit a_n une suite réelle. Montrer qu'il existe une fonction $C^\infty g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $g^{(n)}(0) = a_n$.

2.9.6 Critère de rationalité(**) (205)

Soit $(c_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) La série entère $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ est une fraction rationnelle de rayon de convergence strictement positif ;

(ii) il existe $m \in \mathbb{N}$, $(a_i)_{0\leq i\leq m} \in \mathbb{Q}^{m+1} \setminus \{0\}$ et $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que pour tout $n \geq N$,

$$\sum_{i=0}^{m} a_i c_{i+n} = 0$$

(iii) il existe $m \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\det((c_{n+i+j})_{0\leq i,j\leq m}) = 0$$

2.9.7 Astuce d'équivalent(**) (206)

1. Trouver un équivalent simple selon n au nombre de solutions dans $\mathbb{N}^3$ de

$$3k + 5p + 7q = n$$

2. Trouver le second terme du développement.
3. Généraliser.

2.9.8 DSE réelle(**) (207)

Montrer qu'une fonction DSE de rayon de convergence > 0 réelle en tout point est constante.

2.9.9 Nombre de dérangements(**) (208)

On pose S_k le nombre de dérangements des permutations de k éléments, c'est-à-dire les permutations n'ayant aucun point fixe.

1. Montrer que

$$k! = \sum_{i=0}^{k} C_i^k S_i$$

2. Montrer que si $f(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{S_k}{k!} x^k$, f est DSE avec $R > 1$ et que $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.
3. En déduire que $S_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$

2.9.10 Principe des zéros isolés(**) (209)

Montrer que si f est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, non constante, alors ses zéros sont isolés, c'est à dire que pour pour $z \in B(0, R)$, $f(z) = 0 \Rightarrow$ il existe V voisinage de z tel que $\forall\, z' \in V - \{z\}$, $f(z') \neq 0$. (***)En déduire que Γ se prolonge de façon unique sur $\mathbb{C}$ privé de $-\mathbb{N}$.

2.9.11 Coefficients nuls - tiré du Rudin ?(****) (210)

On considère une série entière f à rayon de convergence infinie.

1. Montrer que la fonction est DSE au voisinage de chaque point.
2. Montrer que si le développement autour de chaque point admet un coefficient nul, alors f est un polynôme.

2.9.12 Oral ULCR 2017(***) (211)

On considère (a_n) une suite de réels non nuls, et $P_n = \sum_{n\geq i\geq 0} a_k X^k$.
On suppose que tous les P_n sont scindés dans $\mathbb{R}$. On pose $\alpha_{1,n}, \dots \alpha_{n,n}$ les racines (réelles) de P_n. On cherche à montrer que la série entière $\sum a_k X^k$ est de rayon infini.

1. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{i,n}^2}$ est constante pour $n \geq 2$.
2. Montrer qu'il existe C telle que, $\forall n > 2$, $a_n^2 \leq \frac{C}{n^2}(a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2})$.
3. Montrer, $\forall \varepsilon, \exists\, C_\varepsilon$ tel que $\forall n$, on a

$$a_n^2 \leq C_\varepsilon \varepsilon^n$$

Conclure.

2.9.13 Convergence de suite de séries entières (212)

On se donne $c > 0$ et des suites $(a_{k,n})$ positives telles que, pour tout k :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n} \leq c$$

On pose $f_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{k,n} x^n$. On suppose que les f_k convergent simplement sur $[0,1[$ vers une fonction f. Montrer que f est DSE sur $[0,1[$.

2.9.14 Équivalence au bord du disque de convergence(***) (213)

1. Soit a_n et b_n deux suites positives équivalentes. On suppose que les séries $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ convergent pour $|x| < a$ et qu'elles divergent en a. Montrer que f et g sont équivalentes en a.
2. On considère la série entière $f(x) = \sum_{n\geq 0} \sqrt{n} x^n$. Déterminer un équivalent simple de f en 1.
3. On considère la série entière $g(x) = \sum_{k\geq 0} x^{k^2}$. Déterminer en équivalent simple de g en 1.

2.9.15 Inverse de série entière(***) (214)

Soit $f(z) = \sum_{i\geq 0} a_i z^i$ une série entière avec $a_0 \neq 0$ de rayon de convergence $R > 0$.
Montrer qu'il existe g série entière de rayon de convergence R' non nul telle que $f(z)g(z) = 1$ pour $|z| < \min(R, R')$.

2.10 Intégrales à paramètres

2.10.1 Calcul avec changement de variable, IPP... (215)

Pour $x > 1$, on pose $f(x) := \int\limits_1^{+\infty} e^{it^x} dt$.

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $]1, +\infty[$.
2. Donner un équivalent de f en $+\infty$. (Réponse : $f \sim \frac{1}{x} \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u} du$ au voisinage de $+\infty$)

2.10.2 Une intégrale à paramètre quelconque (216)

On pose $f(x) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2+t}} dt$.

1. Étudier la définition, la continuité et la dérivabilité de f.
2. Donner la limite puis un équivalent de f en 0 et en $+\infty$. (Réponse : $f \underset{0}{\sim} -\ln x$ et $f \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$)

2.10.3 Une autre intégrale à paramètre quelconque (217)

On pose, pour $x > 0$, $f(x) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^x} dt$.

1. Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$.
2. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de f. (Réponse : $f \underset{0}{\to} +\infty$ et $f \underset{+\infty}{\to} \ln 2$)
3. Donner un équivalent de f en 0. (Réponse : $f \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{x}$)

2.10.4 Une formule étrange (218)

Calculer $\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

2.10.5 Un peu de calcul d'intégrales (219)

On considère $f : \alpha \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^\alpha \mathrm{d}t$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Calculer f en tout point de son domaine de définition.

2.10.6 Une preuve du théorème fondamental de l'algèbre(***) (220)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui ne s'annule pas. Montrer que f est un multiple de $e^{\int \frac{f'}{f}}$.
2. On considère P un polynôme qui ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$.
   Montrer que $\forall r \in \mathbb{R}^+$, on a :
   $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta}P'(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta}{P(re^{i\theta})} \in \mathbb{Z}$$
3. Conclure à l'aide des théorèmes sur les intégrales à paramètres.

2.10.7 Calcul d'équivalent(**) (221)

On pose
$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{t}{1+t^2}e^{-xt}$$
Déterminer les équivalents de f en 0 et ∞.

2.10.8 Mines 2 MP 2016(**) (222)

On pose $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\mathrm{d}u$, et $K = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. Montrer que F est C^1 et en calculer la dérivée (sous forme intégrale)
3. Montrer que $\forall x > 0$, $xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x) = -K$.
4. On pose $G(x) = e^{-x}\sqrt{x}F(x)$. Donner, à une constante près, l'expression de G.
5. En étudiant G en 0 et en $+\infty$, déduire la valeur de K.

2.10.9 Maths C 2015(**) (223)

En considérant une relation entre
$$F(t) = \left(\int_0^t e^{-u^2}\mathrm{d}u\right)^2$$
et
$$G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}\mathrm{d}t}{1+x^2}$$
calculer l'intégrale de Gauss.

2.10.10 Application simple (*) (224)

Définition et calcul de
$$f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Arctan}(x\tan(t))}{\tan(t)}\mathrm{d}t$$

2.10.11 Stirling généralisé(***) (225)

On considère la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^+} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.
À l'aide du changement de variable $t = x(1+u)$ et en admettant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, montrer qu'on a
$$\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$$
Remarque : si l'on connait Stirling, on tient ici une nouvelle façon de calculer l'intégrale de Gauss :-)

2.10.12 Intégrale à paramètres symétriques (***) (226)

Montrer que l'application $A \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2 A}\mathrm{d}t$ qui prend ses valeurs dans S_n^{++} est C^{∞}.

2.10.13 Classique (**) (227)

Soit f une fonction C^{∞}.

1. Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x}$ est aussi C^{∞}.
2. Généraliser en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral.

2.11 Calcul différentiel

2.11.1 Fonction radiale(**) (228)

On considère f une fonction C^2 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ telle que f prend la même valeur pour les vecteurs de même norme. On pose ϕ telle que $f(x) = \phi(||x||_2)$. Montrer que ϕ est C^2.

2.11.2 Rolle généralisé(**) (229)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable constante sur la sphère unité.
Montrer qu'il existe un point x_0 dans la boule unité telle que $\mathrm{d}f_{x_0}$ est nulle.

2.11.3 Homogénéité et linéarité(**) (230)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable telle que $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
Montrer que f est linéaire.

2.11.4 Jacobienne antisymétrique(**) (231)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que sa jacobienne en tout point est antisymétrique.
Monrer qu'il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$f(x) = Ax + b$$

2.11.5 Opérateur proximal de norme L^2(**) (232)

Minimiser $||a - bx||^2 + \lambda\,||x||^2$ dans un espace euclidien.

2.11.6 Méthode des caractéristiques(***) (233)

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0 \\ f(0, x) = f_0(x) \end{cases}$$

pour $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

1. Chercher deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ t et s telles que $s \mapsto f(t(s), x(s))$ soit constante.
2. En déduire une formule pour f.

2.11.7 Principe du maximum(***) (234)

Soit u une fonction strictement sous-harmonique, c'est-à-dire que $\Delta u > 0$

1. Montrer que sur une boule, u atteint son maximum sur le bord.
2. Étendre ce résultat aux fonctions sous-harmoniques.
3. En déduire l'unicité des solutions d'un problème de Dirichlet, c'est-à-dire un système de la forme

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \\ u_{|\partial\Omega} &= g \end{cases}$$

   où g est suffisamment régulière.

2.11.8 Ouvert des matrices cycliques(***) (235)

Soit l'application

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^n \\ M & \mapsto & (\mathrm{Tr}(M), \dots, \mathrm{Tr}(M^{n-1})) \end{cases}$$

1. Montrer qu'elle est différentiable en tout point et calculer sa différentielle.
2. Montrer que le rang de $\mathrm{d}f_M$ est le degré du polynôme minimal de M.
3. En déduire que l'ensemble des matrices dont le polynôme caractéristique est égal au polynôme minimal est un ouvert.

2.11.9 Gradient d'une fonction strictement convexe (***) (236)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ strictement convexe telle que $\frac{f(x)}{||x||} \to \infty$ lorsque $||x|| \to \infty$.
Montrer que l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ a & \to & \nabla f_a \end{array} \right.$$

est une bijection.

2.11.10 Différentielle du déterminant(***) (237)

1. Montrer que le déterminant est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Calculer sa différentielle en toute matrice inversible.
3. En déduire une formule en toute matrice.

2.11.11 Une maximisation difficile(****) (238)

Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : (x,t) \mapsto -\ln(t^2 - ||x||^2)$.

Maximiser, pour $y, s \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, la fonction $\langle y, x\rangle + st - f(x,t)$ sur $\mathrm{dom}(f)$.

2.11.12 Aire d'un triangle inscrit dans un cercle(**) (239)

Quelle est l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon r ?

2.12 Équations différentielles

2.12.1 Gronwall Généralisé(**) (240)

Soit $X : t \mapsto X(t)$ une fonction vectorielle dérivable telle qu'on a sur $[-T, T]$

$$||X'(t)|| \leq a + b\,||X(t)||$$

Montrer, à l'aide du Lemme de Gronwall, que $||X(t)|| \leq (||X(0)|| + aT)e^{b|t|}$.

2.12.2 Maths B 2018(***) (241)

On considère x une fonction telle que $x(0) = 0$ et solution non nulle de l'équation différentielle

$$x''(t) - p(t)x(t) = 0$$

1. Montrer que si $x(s) = 0$, alors $x'(s)$ est non nul.
2. Montrer que le nombre de solutions à l'équation $x(t) = 0$ dans $[0, 1]$ est fini.

On considère y solution d'une même équation avec $y(0) = 0$, en remplaçant p par $q < p$. On considère $w(t) = y(t)x'(t) - x(t)y'(t)$. Supposons que les a_j sont les zéros de x rangés dans l'ordre croissant.

3. On suppose que $x > 0$ et $y > 0$ sur $]a_j, a_{j+1}[$. Montrer que $w(a_{j+1}) > w(a_j)$. En déduire une contradiction.
4. En déduire que y s'annule sur $]a_i, a_{i+1}[$.

2.12.3 Cachan 2017(***) (242)

On étudie l'équation différentielle $S'(t) = P(t)S(t) - S(t)P(t)$, $S(0) = S_0$ matrice symétrique, avec PC^1 à valeurs dans les matrices antisymétriques.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution, à valeurs dans les matrices symétriques.
2. Montrer que $S(t)$ est semblable à S_0. Montrer qu'on a une matrice de passage orthogonale qui vérifie l'équa diff $U'(t) = P(t)U(t)$, et $U(0) = \mathrm{Id}$.

2.12.4 Un petit calcul(**) (243)

Montrer que les solutions non constantes de l'équation différentielle non linéaire

$$f' = f(f-1)$$

s'écrivent sous la forme $\frac{1}{e^{C+x}+1}$

2.12.5 Une équation fonctionnelle(***) (244)

On considère l'équation fonctionnelle, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'inconnue :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = f(-t)$$

1. Est-ce une équation différentielle ? Résoudre cette équation.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire. Résoudre $f'(t) = g(t)f(-t)$.
3. Même question lorsque g est paire.

2.12.6 Un contre exemple au problème de Cauchy et séparation des constantes(**) (245)

Résoudre, $\forall A > 0$, l'équation différentielle suivante :

$$h'(t) = -A\sqrt{h(t)}$$

Montrer qu'ici le problème de Cauchy admet plusieurs solutions.

2.12.7 Ordre deux non linéaire (246)

On considère y une solution non nulle de l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) - q(t)y(t) = 0$$

1. Montrer que y^2 est une fonction convexe. Est-ce que y peut-être bornée ?

2.12.8 Fonction de Dickmann(***) (247)

On définit la fonction de Dickmann, ρ, de la façon suivante :

$$\begin{cases} \rho(u) = 1 & \text{sur} \quad [0,1] \\ u\rho'(u) = -\rho(u-1) & \text{pour} \quad u \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la définition est cohérente. Sur quels intervalles la fonction est-elle C^k ?
2. Trouver une expression de ρ sur $[1,2]$.
3. Montrer qu'on a $\forall\ u \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\Gamma(2u+1)} \leq \rho(u) \leq \frac{1}{\Gamma(u+1)}$

2.12.9 Opérateur(***) (248)

Soit $I = [a,b]$ un intervalle compact non réduit à un point.
On prend une fonction h est strictement positive sur I. On pose :

$$E = \{f \in \mathcal{C}^2(I) | f(a) = f(b) = 0\}$$

et on considère l'opérateur $K : f \mapsto \frac{f''}{h}$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(K) \subset]-\infty, 0[$.
2. Trouver un produit scalaire pour lequel deux vecteur propres de K de valeur propres distinctes sont orthogonaux.

2.13 Autres

2.13.1 X 2017 Clavier - Théorème de Krovokin(***) (249)

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit U l'ensemble des opérateurs positifs sur E, c'est-à-dire ceux tels que $f \geq 0$ implique $u(f) \geq 0$.

1. Montrer que tout opérateur positif est continu.
2. Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon$ telle que :

$$\forall x, y \in [0,1], |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + C_\varepsilon (x-y)^2$$

3. Posons $e_k : x \mapsto x^k$. Supposons qu'il existe une suite u_n d'opérateurs dans U telle que $u_n(e_i)$ converge uniformément vers e_i.
   Montrer que pour tout f dans E, $u_n(f)$ converge uniformément vers f.

2.13.2 Indice d'une courbe fermée(***) (250)

Soit $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^* 2\pi\text{-périodiques et } C^1.\}$.
On pose

$$d(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} \mathrm{d}\theta$$

1. Montrer que $d(f)$ est un entier.
2. Montrer que $\forall f \in F$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $||f - g||_\infty \leq \varepsilon$, alors $d(f) = d(g)$.
3. Montrer qu'on peut prolonger d en une fonction continue pour la norme infinie sur les fonctions 2π-périodiques continues dans $\mathbb{C}^*$.

2.13.3 Théorème d'Ascoli(***) (251)

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et f_n une suite de fonctions continues $A \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in A$, il existe M_x tel que pour tout n
$$f_n(x) \leq M_x$$
Montrer que si A est fini ou dénombrable, on peut extraire une sous-suite de f_n convergeant simplement vers une fonction f sur A.
2. Montrer que si on ajoute l'hypothèse d'équicontinuité, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout n
$$|x - y| \leq \eta \implies |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$$
, alors il existe une extractrice pour laquelle on a convergence simple sur tout A, et uniforme sur tout compact.
3. Montrer que réciproquement, si f_n est une suite convergeant uniformément sur tout compact, elle est uniformément bornée et vérifie les hypothèses d'équicontinuité.

2.13.4 Lemme de Carathéodory(***) (252)

On se place dans un espace vectoriel E de dimension n. On considère K un compact de E.

1. Montrer tout point de l'enveloppe convexe de K est combinaison convexe de $n + 1$ points de K.
2. Montrer que $\mathrm{Conv}(K)$ est compact.

2.13.5 Théorème d'Artin(***) (253)

Soit $\Phi :]0, \infty[\to]0, \infty[$ dérivable telle que $\ln \circ \Phi$ est convexe et $x\Phi(x) = \Phi(x + 1) \forall x$. On pose $H = \frac{\Phi}{\Gamma}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq 0$, on a :
$$\frac{\Phi'(n)}{\Phi(n)} - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} \leq \frac{H'(n+x)}{H(n+x)} \leq \frac{\Phi'(n+1)}{\Phi(n+1)} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$$
2. En déduire que $\Phi = \Phi(1)\Gamma$.
3. *Application*
On pose $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1 - t)^{y-1} \mathrm{d}t$ Donner son ensemble de définition, puis montrer que
$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}$$
On admettra la log-convexité
En déduire la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

2.13.6 Diviseurs(****) (254)

Soit f une fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$. On pose sa série de Dirichlet $Z_f(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$. On pose $*$ le produit de convolution classique.

1. Montrer que $Z_f Z_g = \sum_{n \geq 1} \frac{(f*g)(n)}{n^s}$ lorsque les quantités sont bien définies.
2. On pose $a_{n,k}$ le nombres de k-uplets $(b_1, \ldots, b_k)$ distincts tels que $b_1 b_2 \ldots b_k = n$, où $b_i \geq 2$. On pose $a_n = \sum_{k \geq 1} a_{n,k}$. Montrer que $a_n = O(n^\epsilon)$ pour tout epsilon > 0.

2.13.7 Entiers dans le cercle(**) (255)

Posons $r(n)$ le nombre de couples d'entiers relatifs (j,k) tels que $j^2+k^2=n$. Montrer qu'on a :

$$\sum_{n\leq x} r(n) = \pi x + O(\sqrt{x})$$

2.13.8 Somme des diviseurs(**) (256)

On pose $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n.

1. Montrer que $\tau(n) = O_\varepsilon(n^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.
2. Montrer que $\sum_{n\leq x} \tau(n) = x\ln(x) + O(x)$
3. (***) Montrer que $\sum_{n\leq x} \tau(n) = x(\ln(x) + 2\gamma - 1) + O(x^{\frac{1}{2}})$

2.13.9 Précompacité quantitative (257)

Soit T une partie d'un espace vectoriel normé E. Soit $N(\delta,T)$ le cardinal minimal d'une famille finie $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ dont l'union $\cup B(a_i,\delta)$ contient T.
Soit $M(\delta,T)$ la cardinal maximal d'une famille finie $(b_1,\ldots,b_m)$ telle que $||b_i - b_j|| \geq \delta$ dès que $i \neq j$.
Montrer que

$$M(2\delta,T) \leq N(\delta,T) \leq M(\delta,T)$$

2.13.10 Diophante(**) (258)

Soient $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = 1$. Soit $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ une fraction irréductible.
Montrer que $\frac{ax+by}{cx+dy}$ est aussi une fraction irréductible.

3 Probabilités

3.0.1 3 valeurs(*) (259)

On considère une variable aléatoire prenant 3 valeurs. Montrer que sa loi est caractérisée par son espérance et sa variance.

3.0.2 Produit eulérien probabiliste(**) (260)

On considère la loi suivante de probabilité sur $\mathbb{N}^*$, pour $s > 1$:

$$\mathbb{P}(X = n) = \zeta(s)^{-1}\frac{1}{n^s}$$

1. Montrer que, pour p et q premiers entre eux, les évènements $p|X$ et $q|X$ sont indépendants.
2. En déduire le produit eulérien de la fonction ζ.

3.0.3 Usines et collections(**) (261)

Dans une usine, une machine produit n pièces qu'elle stocke aléatoirement dans n boîtes, où n est très grand. Chaque pièce est envoyé dans une boîte de façon équiprobable ; ainsi à la fin, une même boîte peut contenir plusieurs pièces. Soit N_i le nombre de pièces dans la i-ième boîte, et $N = \max_{i\in\{1,\ldots n\}} N_i$. On souhaite montrer que quand $n \to \infty$,

$$\mathbb{E}(N) = O(\frac{\ln n}{\ln \ln n})$$

1. Quelle est la proportion moyenne de boîtes vides ?
2. Les N_i sont elles mutuellement indépendantes ? En calculer la loi.
3. Montrer que $\mathbb{P}(N = k) \leq \frac{n}{k!}$.
4. Soit $\alpha \in [1,n]$. Montrer que $\mathbb{E}[N] \leq n\mathbb{P}(N > \alpha) + \alpha$. Montrer que $\mathbb{P}(N > \alpha) \leq \frac{n}{\lceil\alpha\rceil!}$.
5. En déduire que $P(N > \alpha) \leq n^2(\frac{e}{\alpha})^\alpha$.
6. Montrer qu'il existe un unique α_n tel que

$$(\frac{e}{\alpha_n})^{\alpha_n} = \frac{1}{n^3}$$

Trouver un équivalent de α_n et conclure.

3.0.4 Application du crible (262)

On dispose de 100 lettres nominatives, que l'on place aléatoirement dans 100 enveloppes (avec une adresse sur chacune). Quelle est la probabilité que personne ne reçoive la lettre qui lui est attribuée ?

3.0.5 Application de Borel-Cantelli (263)

Soit (X_n) une suite de va tel que $\forall \varepsilon > 0, \sum \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon)$ converge. Montrer que $X_n \to 0$ presque sûrement.

3.0.6 Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$(**) (264)

1. Calcul de la loi d'une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ après n lancers.
2. Montrer que la probabilité de retour en 0 vaut 1.

3.0.7 Théorème du scrutin (265)

2 candidats se présente à l'élection des délégués. Le premier obtient a voix, le second b voix ($b < a$). Calculer la probabilité que, durant le dépouillement, A reste au dessus de B strictement.

3.0.8 X 2017(***) (266)

On considère X_n suivant une loi uniforme sur $[|1, n|]$, R_n le reste de la division euclidienne de n par X_n. On pose $Y_n = \frac{R_n}{X_n}$.

1. Donner une expression (compliquée mais déterministe) de $P(Y_n \geq \frac{1}{2})$
2. Calculer sa limite en $+\infty$.

3.0.9 Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein(***) (267)

On répartit au hasard r boules dans n cases. Soit $r_1, ...r_n$ des entiers tels que $r_1 + \cdots + r_i = r$.

1. *Statistique de Maxwell-Boltzmann*
   Expliciter les espaces de probabilités décrivant cette expérience et calculer la probabilité d'obtenir r_1 boules dans la case 1, ... r_i boules dans la case i, en supposant que toutes les configurations de boules sont possibles et équiprobables.
2. *Statistique de Bose-Einstein*
   Même chose en supposant que toutes les configurations possibles pour le nombre de boules sont possibles et équiprobables.

3.0.10 Population de bactéries(***) (268)

On définit pour chaque temps n une population de bactéries, de façon probabiliste.
Au temps 0, on a une population de N individus dont k ont une mutation. On note $p_0 = \frac{k}{N}$.
On obtient la population au temps $n+1$ en fonction de la précédente, par une loi binomiale $\mathcal{B}(N, p_n)$, où p_n est la fraction de la population mutante au temps n.

1. Montrer que $\mathbb{E}(p_n)$ est constante.
2. Montrer que $\mathbb{P}(p_n = \frac{i}{N}) \to 0$ quand $i \notin \{0, N\}$.
3. En déduire que $\mathbb{P}(p_n = 1)$ tend vers p_0 quand $n \to \infty$.

3.0.11 Probabilité et arithmétique(***) (269)

Existe-t-il une probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(a\mathbb{N}) = \frac{1}{a}$?

3.0.12 La double galette(***) (270)

Nous sommes 16 joyeux lurons à vouloir déguster une galette des rois. Nous disposons de deux galettes, chacune contenant une fève.

On hésite entre deux découpes possibles :
— On découpe chaque galette en 8 parts, et chacun prend une part, uniformément au hasard.
— On découpe chaque galette en 16 parts, et chacun prend une part de chaque galette.
Quelle découpe maximise la probabilité de trouver une fève et de devenir le roi de la France ?

3.0.13 Dés pipés(**) (271)

1. On considère deux dés équilibrés. Déterminer la loi de la somme des points.
2. Est-il possible de truquer deux dés indépendants de manière à ce que la somme des points obtenue soit équirépartie sur $\{2, \dots, 12\}$?

3.0.14 Manche en n points (***) (272)

Deux joueurs jouent à un jeu où le premier qui remporte n points gagne. À chaque point, le joueur 1 a une probabilité p de gagner.

1. Trouver une formule pour la probabilité.
2. Étudier le comportement quand $n \to \infty$.
3. Expliquer pourquoi le tennis est mathématiquement plus intéressant à suivre que le Tennis de table.

3.0.15 Décomposabilité(***) (273)

Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$. On dit qu'X est *décomposable* lorsqu'il existe deux variables aléatoires indépendantes Y et Z non p.s constantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $Z + Y$ ait la même loi que X.

1. Si X est décomposable, donner une relation entre G_X, G_Y et G_Z.
2. Montrer qu'une binomiale est décomposable.
3. Montrer que si $n > 1$ est non premier , alors une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ est décomposable.
4. Montrer qu'au contraire, si $n > 2$ est premier, alors la loi uniforme est indécomposable.

3.0.16 Inégalité de Hoeffding(***) (274)

1. Soit Y une variable aléatoire discrète telle que $c \le Y \le d$ p.s. Montrer que $\mathbb{E}(e^{sY}) \le \exp(\frac{s^2(d-c)^2}{8})$.
2. En déduire que si X_k est une suite de variables aléatoire telle que $a_i \le X_i \le b_i$ p.s de somme $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, on a :

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \ge t) \le \exp(\frac{2t^2}{\sum_i^n (b_i - a_i)^2})$$

3.0.17 X Askinazi 2k17(*** (275)

Soient X_n une suite i.i.d de Rademacher. On pose $S_n = \frac{\sum X_i}{\sqrt{n}}$ et $\Gamma : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$E(P(S_n) \to \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x) P(x) \mathrm{d}x$$

quand $n \to \infty$.

3.0.18 Tirage uniforme de permutations(*** (276)

Soit n un entier naturel non nul. On tire $2N$ entiers naturels $(i_1, \dots i_N, j_1, \dots j_N)$.

1. Comment choisir N pour etre sur de pouvoir tirer n'importe quelle permutation ?
2. La distribution est-elle uniforme sur S_n ?

Autre méthode : on tire uniformément k_1 dans $\{0, 1\}$, k_2 dans$\{0, 1, 2\}$, etc. On tire $\sigma = (12)^{k_1}(123)^{k_2}(12 \dots n)^{k_n}$ Peut-on tirer toutes les permutations ? Le tirage est-il uniformes sur toutes les permutations qu'on peut obtenir ?

3.0.19 Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$(***) (277)

On considère une particule se déplaçant au hasard dans un plan de la manière suivante :
— le temps est discret ;
— À l'instant n, la particule tire une direction au hasard parmi Nord, Sud, Est, Ouest avec probabilité $\frac{1}{4}$ pour chaque direction puis effectue un pas dans cette direction
— Les tirages sont mutuellement indépendants.

On note $Z_n = (X_n, Y_n)$ la position à l'instant n. On note N le nombre d'instants n tels que $Z_n = (0, 0)$, à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On cherche à montrer que cette marche revient presque sûrement une infinité de fois au centre.

1. Montrer que $\mathbb{P}(N \ge 2) = \mathbb{P}(N \ge 1)^2$. Généraliser.

2. En déduire qu'il suffit de montrer que la somme $\sum_k \mathbb{P}(N \geq k)$ diverge.
3. Exprimer $\mathbb{P}(Z_n = 0)$ comme somme de coefficients binomiaux.
4. Montrer que pour tout $k, nm \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i+j=k} \binom{m}{i}\binom{n}{j} = \binom{m+n}{k}$$

5. En déduire un équivalent de $\mathbb{P}(Z_{2n} = 0)$. La série est-elle convergente ?
6. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose N_p la variable aléatoire valant 1 si $Z_p = 0$ et 0 sinon. Montrer que

$$\mathbb{E}(N_0 + \dots N_p) \to +\infty$$

.
7. Conclure.

3.0.20 Lemme de Beppo-Levi(***) (278)

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles positives.

1. Montrer que

$$0 \leq \mathbb{E}[X] \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k)$$

2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes réelles positives. On suppose que $\forall \omega \in \Omega$, la suite $X_n(\omega)$ tend vers 0 en décroissant, et $\mathbb{E}[X]$.
Montrer que $\mathbb{E}(X_n) \to 0$.
3. Soit X_n une suite de v.a positives telles que $\forall \omega in \Omega$ la série $\sum_n X_n(\omega)$ converge vers un réel noté $X(\omega)$. On suppose qu'X est une variable aléatoire discrète. Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_n \mathbb{E}[X_n]$$