Graphes et Langages

Chapitre 1
Graphes non orientés

Leo Donati   Noëlle Stolfi

Université de Nice Sophia Antipolis
IUT Nice Côte d'Azur
DUT Informatique

Chapitre 1 : Graphes non orientés

1. Graphes non orientés
   - Définitions
   - Ordre et Degré
   - Matrice d'Adjacence
   - Isomorphismes de graphes
2. Graphes simples
   - Graphes complets
   - Graphes réguliers
   - Graphes bipartites
   - Graphes planaires
3. Parcourir un graphe
   - Chaîne et cycles
   - Connexité
   - Graphes eulériens
   - Graphes hamiltoniens
4. Coloration
   - Problématique
   - Problème des 4 couleurs
   - Algorithmes de coloration
   - Nombre chromatique

Concept

Le graphe

Le graphe est l'objet mathématique qui représente le concept de connexion, de liaison entre éléments (quels qu'ils soient).
Ce ne sont pas ces éléments (les sommets ou nœuds) qui sont importants mais la façon dont ils sont reliés les uns aux autres

- par des arêtes quand le lien est bidirectionnel
- par des arcs lorsque le lien possède un sens.

Des variantes

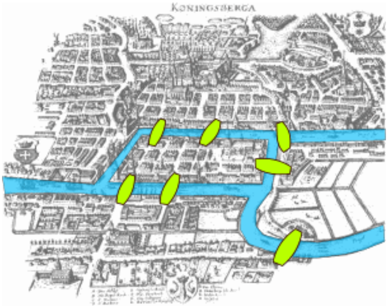
Différents types de graphes

- les graphes non orientés dans lesquels le lien n'est pas directionnel et donc la connexion se fait dans les deux sens ;
- les graphes orientés dans lesquels il y a un sens dans le lien qui doit être spécifié ;
- les graphes étiquetés dans lesquels on dote le lien d'une information supplémentaire (une étiquette) qui peut par exemple être un *nombre* (on parle alors de graphes valués) qui représente la distance entre deux points ou le débit maximal que peut supporter la connexion.

Aperçu historique

Naissance

La théorie des graphes est née en 1736 quand Leonhard Euler (1707–1783) démontra qu'il était impossible de traverser chacun des sept ponts de la ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) une fois exactement puis revenir au point de départ.



Graphe non orienté

Définition

Un graphe non orienté G est donné par un triplet (V, E, γ)

- V (comme vertex) est l'ensemble des sommets du graphe G (aussi appelés nœuds du graphe) ;
- E (comme edge) est l'ensemble des arêtes du graphe G
- γ est la fonction d'incidence qui à chaque arête associe les sommets qu'elle joint. Comme une arête peut joindre un sommet à lui même (une boucle) alors

$$\gamma : \ E \longrightarrow U$$

où U est le sous–ensemble de $P(V)$ des parties à un ou deux éléments.

Types d'arêtes

Deux cas de figure

Si $a \in E$ est une arête de G, alors :

- soit $\gamma(a) = \{s_1, s_2\}$ alors on dit que a relie les sommets s_1 et s_2 et donc que s_1 et s_2 sont adjacents.
- soit $\gamma(a) = \{s_1\}$ alors on dit que a est une boucle sur le sommet s_1.

Arêtes parallèles

On dit que deux arêtes sont parallèles si elles ont les mêmes extrémités :

$$a_1 \| a_2 \Leftrightarrow \gamma(a_1) = \gamma(a_2)$$

Graphe simple

Définition

Un graphe **simple** est un graphe non orienté qui n'a ni boucles ni arêtes parallèles.

Remarque

Dans de nombreux contextes les graphes qui apparaissent sont forcément simples.
Certains livres réservent le mot graphe uniquement aux graphes simples.

Ordre d'un graphe

Définition

L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets du graphe.

Si $G = (V, E, \gamma)$

$$o(G) = card(V)$$

Degré

Définition

Le degré d'un graphe est le nombre d'arêtes du graphe.

Si $G = (V, E, \gamma)$

$$d(G) = card(E)$$

Degré d'un sommet

Définition

Le degré d'un sommet $s \in V$ est le nombre d'arêtes issues de s.
Notation : $d(s)$.

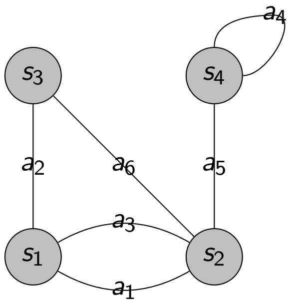
Remarque

Quand on calcule le degré d'un sommet, les boucles qui passent par ce sommet comptent deux fois.

Exemple 1

$G = (V, E, \gamma)$

- $V = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$
- $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$
- l'application γ définie par
  - $\gamma(a_1) = \{s_1, s_2\}$
  - $\gamma(a_2) = \{s_1, s_3\}$
  - $\gamma(a_3) = \{s_1, s_2\}$
  - $\gamma(a_4) = \{s_4\}$
  - $\gamma(a_5) = \{s_4, s_2\}$
  - $\gamma(a_6) = \{s_3, s_2\}$



$o(G) = 4, d(G) = 6$

$d(s_1) = 3;\ d(s_2) = 4;\ d(s_3) = 2;\ d(s_4) = 3;$

Lien

Théorème

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égal au double du degré du graphe.

$$\sum_{s \in V} d(s) = 2 \cdot d(G)$$

Preuve

Chaque arête a deux extrémités, donc fait augmenter de 1 le degré de chacune de ses extrémités.

Dans l'exemple 1 :

$d(s_1) + d(s_2) + d(s_3) + d(s_4) = 12 = 2 \times 6$

Conséquence

Corollaire

Dans un graphe il ne peut pas y avoir un nombre impair de sommets de degré impair.

Preuve

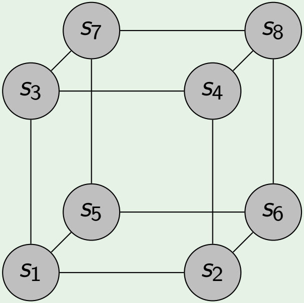
Comme la somme des degrés de tous les sommets est un nombre pair (le double du degré du graphe), si on avait un nombre impair de sommets de degré impair on aurait un total impair.

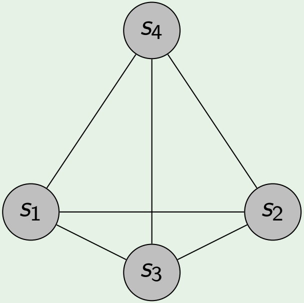
Solides

Figure géométrique

Tout polygone, ainsi que tout polyèdre peut être considéré en tant que graphe.

Le cube et le tétraèdre

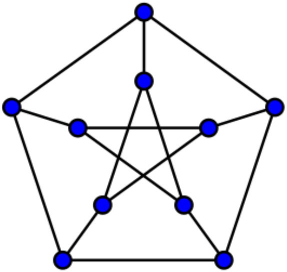




Graphe de Petersen

Le contrexemple parfait

Le graphe de Petersen est un graphe simple particulier d'ordre 10 et de degré 15.



Représentation matricielle

Principe

Il s'agit de représenter les connexions d'un graphe par une matrice carrée.
Il faut pour cela que les sommets soient numérotés de 1 à $o(G)$.

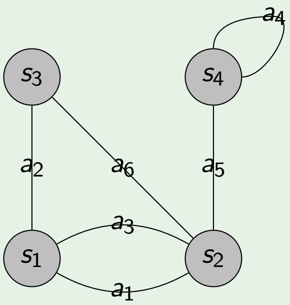
Matrice d'adjacence

La matrice d'adjacente d'un graphe non orienté G d'ordre n dont les sommets sont

$$V = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

est une matrice A de taille $n \times n$ dont l'élément a_{ij} est le nombre d'arêtes qu'il y a entre le sommet s_i et le sommet s_j.

Exemple 1



La matrice d'adjacence de G est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriétés de A

Propriétés

- La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est toujours symétrique
- Les éléments de la diagonale représentent les boucles
- Si G est simple alors A ne comporte que des 0 ou des 1 et sa diagonale est 0
- La somme des éléments de la ligne i donne $d(s_i)$.

Isomorphisme

Problématique

Comment dire si deux graphes représentent la même connectivité même si les sommets et les arêtes ont des noms différents, ou bien s'ils sont dessinés de façon différente ?

Définition

Deux graphes $G = (V, E, \gamma)$ et $G' = (V', E', \gamma')$ sont isomorphes si et seulement si il existe deux applications bijectives :

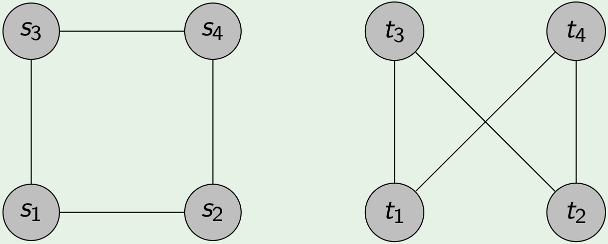
- $\varphi : V \to V'$ entre les sommets ;
- $\psi : E \to E'$ entre les arêtes

qui respectent les fonctions d'incidences ; c'est à dire que

$$\forall a \in E, \gamma(a) = \{s_1, s_2\} \Rightarrow \gamma'(\psi(a)) = \{\varphi(s_1), \varphi(s_2)\}$$

Exemple

Deux graphes isomorphes



Il suffit de définir φ de la façon suivante :

$$\varphi(s_1) = t_1 \quad \text{et} \quad \varphi(s_3) = t_3$$
$$\varphi(s_2) = t_4 \quad \text{et} \quad \varphi(s_4) = t_2$$

Critères d'isomorphisme

Propositions

SI deux graphes sont isomorphes alors ils ont

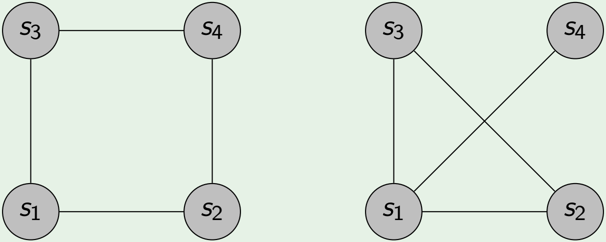
- même nombre de sommets (même ordre)
- même nombre d'arête (même degrés).
- De plus, deux sommets en bijection doivent avoir même degré.

Il n'y a pas de réciproque

Ce n'est pas parce que deux graphes ont même ordre, même degré et des sommets de même degrés qu'ils sont isomorphes.

Contrexemple

Deux graphes avec même degré et même ordre mais non isomorphes



Sous-graphe

Définition

Un sous graphe d'un graphe G est un graphe G' composé d'une partie des sommets de G avec une partie des arêtes qui les relient.

Stable

Un sous graphe stable d'un graphe est un sous ensemble de sommets deux à deux non adjacents.

Exemple

Le graphe du carré est un sous graphe du graphe du cube.

Chapitre 1 : Graphes non orientés

1. Graphes non orientés
   - Définitions
   - Ordre et Degré
   - Matrice d'Adjacence
   - Isomorphismes de graphes
2. Graphes simples
   - Graphes complets
   - Graphes réguliers
   - Graphes bipartites
   - Graphes planaires
3. Parcourir un graphe
   - Chaîne et cycles
   - Connexité
   - Graphes eulériens
   - Graphes hamiltoniens
4. Coloration
   - Problématique
   - Problème des 4 couleurs
   - Algorithmes de coloration
   - Nombre chromatique

Graphes simples

Rappel

Un graphe est simple s'il n'a ni boucles ni arêtes parallèles.

Propriétés

- dans un graphe simple G, chaque sommet est au maximum de degré $o(G) - 1$
- si G est un graphe simple avec n sommets alors

$$d(G) \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

Graphe complet

Définition

Un graphe complet est un graphe simple dans lequel chaque sommet est adjacent à tous les autres.

Propriétés des graphes complets

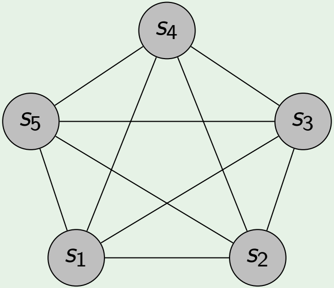
- Un graphe complet est un graphe où la connectivité est maximale ;
- Dans un graphe complet chaque sommet est de degré $o(G) - 1$;
- Si G est complet d'ordre n alors :

$$d(G) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Le graphe complet d'ordre n est noté K_n

- K_1 est un seul sommet
- K_2 sont deux sommets reliés par une arête
- K_3 a la forme d'un triangle
- K_4 a la forme d'un tétraèdre

Le graphe complet d'ordre 5 : K_5



Graphes réguliers

Définition

Un graphe régulier est un graphe simple où tous les sommets sont de même degré.
Si ce degré est r, on parlera de graphe r–régulier.

Propriétés

- les graphes complets sont réguliers
- si un graphe d'ordre n est r–régulier alors son degré est $d = \frac{n \times r}{2}$

Exemples

- les polygônes sont 2–réguliers
- les polyèdres réguliers sont des graphes réguliers
- le graphe de Petersen est 3–régulier.

Graphes bipartites

Définition

Un graphe **bipartite** est un graphe simple où les sommets peuvent se partager en deux groupes $V = V_1 \cup V_2$ tels que :

- chaque sommet de V_1 est adjacent à tous les sommets de V_2 ;
- chaque sommet de V_2 est adjacent à tous les sommets de V_1 ;
- aucune arête ne relie les sommets de V_1 entre eux ;
- aucune arête ne relie les sommets de V_2 entre eux ;

Si $card(V_1) = n$ et $card(V_2) = m$ on note ce graphe $K_{n,m}$

Propriétés des graphes bipartites

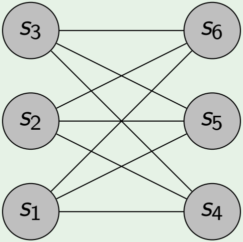
- $o(K_{n,m}) = n + m$
- $d(K_{n,m}) = n \times m$

Exemples de graphes bipartites

Exemples

- $K_{n,0}$ est le graphe complet d'ordre n
- $K_{n,1}$ s'appelle une étoile
- $K_{3,3}$ apparaît dans le problème des trois maisons et des trois chemins.

$K_{3,3}$

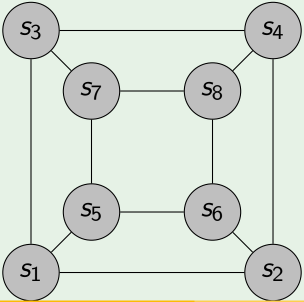


Graphes planaires

Définition de graphe planaire

Un graphe G est planaire s'il existe un graphe G' isomorphe à G qui est dessiné dans le plan sans que deux arêtes se croisent.

Le cube est un graphe planaire car il peut être dessiné ainsi :



Savoir si un graphe est planaire

Exemples de graphes non planaires

- le graphe complet d'ordre 5 : K_5
- le graphe bipartite $K_{3,3}$

Proposition

Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient pas de sous graphe isomorphe soit à K_5 soit à $K_{3,3}$.

Chapitre 1 : Graphes non orientés

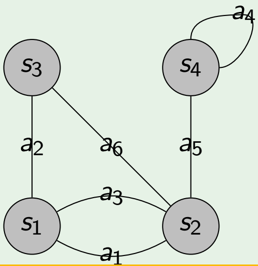
1. Graphes non orientés
   - Définitions
   - Ordre et Degré
   - Matrice d'Adjacence
   - Isomorphismes de graphes
2. Graphes simples
   - Graphes complets
   - Graphes réguliers
   - Graphes bipartites
   - Graphes planaires
3. Parcourir un graphe
   - Chaîne et cycles
   - Connexité
   - Graphes eulériens
   - Graphes hamiltoniens
4. Coloration
   - Problématique
   - Problème des 4 couleurs
   - Algorithmes de coloration
   - Nombre chromatique

Chaîne

Définition

Une chaîne est une suite quelconque de sommets et d'arêtes adjacents.
La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qu'elle comporte.

Exemple 1



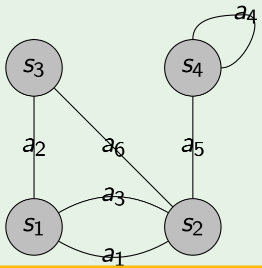
Par exemple $s_1 - a_3 - s_2 - a_5 - s_4 - a_4 - s_4 - a_5 - s_2 - a_6 - s_3$ est une chaîne de longueur 5.

Cycle

Définition

Un cycle est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues et toutes les arêtes sont distinctes.
Si une arête se répète on parlera plutôt de chaîne fermée.

Exemple 1



Par exemple
$s_1 - a_3 - s_2 - a_6 - s_3 - a_2 - s_1$
est un cycle de longueur 3.

Distance

Définition

- On appelle distance de deux sommets du graphe, la longueur de la plus courte chaîne qui relie ces deux sommets.
- La distance d'un sommet à lui même est nulle.
- Deux sommets qui ne peuvent être reliés par une chaîne sont considérés comme étant à une distance infinie.
- Le diamètre d'un graphe est la distance des deux sommets les plus éloignés l'un de l'autre.

Dans l'exemple 1

la distance entre s_1 et s_4 est égale à 2 ; c'est aussi le diamètre de ce graphe.

Chaînes et matrice d'adjacence

Propriété

Soit G un graphe non orienté et A sa matrice d'adjacence.

- l'élément (i,j) de $A^2 = A \times A$ donne le nombre de chaînes de longueur 2 entre les sommets i et j.
- l'élément (i,j) de $A^3 = A \times A^2$ donne le nombre de chaînes de longueur 3 entre les sommets i et j.

Exemple 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

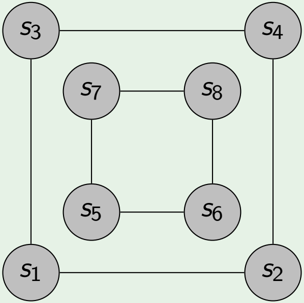
Il y a donc 5 façons d'aller de s_1 vers s_1 avec des chaînes de

Connexité

Définition

Un graphe non orienté est connexe s'il existe toujours une chaîne qui permet d'aller d'un sommet à un autre du graphe.

Exemple de graphe non connexe



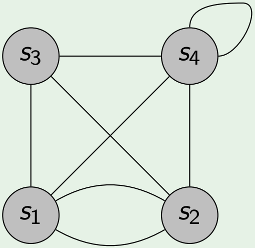
Fermeture transitive

Définition

La fermeture transitive d'un graphe non orienté G est le graphe $\hat{G}$

- qui a les mêmes sommets que G
- qui a une arête entre s_1 et s_2 si dans G il y a une chaîne entre s_1 et s_2.

Fermeture transitive de l'exemple 1



Calcul de la fermeture transitive

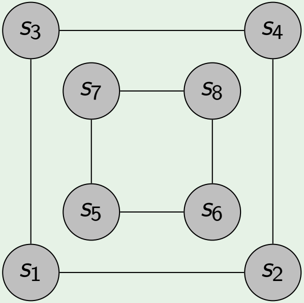
Si A est la matrice d'adjacente du graphe G, on obtient la matrice $\hat{A}$ de $\hat{G}$

- en partant de la matrice A
- en mettant à 1 l'élément (i,j) de $\hat{A}$ si dans A^2 l'élément (i,j) est non nul, pour tenir compte des chaînes de longueur 2 entre s_i et s_j
- en mettant à 1 l'élément (i,j) de $\hat{A}$ si dans A^3 l'élément (i,j) est non nul, pour tenir compte des chaînes de longueur 3 entre s_i et s_j
- ainsi de suite jusqu'à ce qu'on n'ajoute aucun nouveau 1

Connexité et fermeture transitive

Connexité

Un graphe simple non orienté G est connexe si sa fermeture transitive $\hat{G}$ est un graphe complet.



Dans la fermeture transitive de ce graphe on aura deux copies de K_4 disjointes.

Graphes eulériens

Définition

- une chaîne eulérienne est une chaîne composée de toutes les arêtes du graphe **prises** chacune une fois et une seule.
- Un cycle eulérien est un cycle présentant les mêmes propriétés
- Un graphe eulérien est un graphe possédant un cycle eulérien
- Un graphe semi–eulérien (ou traversable) est un graphe possédant une chaîne eulérienne

Remarque

On impose de passer une et une seule fois par chaque arête mais pas de passer une et une seule fois par chaque sommet.

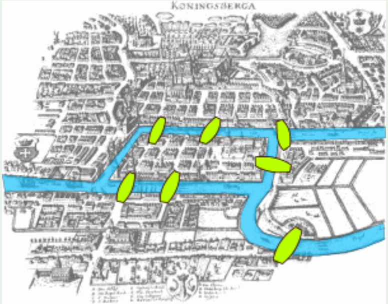
Théorème

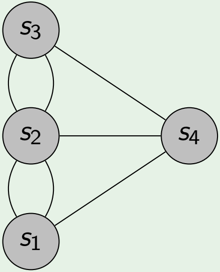
Théorème d'Euler

- Un graphe simple est eulérien si et seulement si il est connexe et tous ses sommets sont de degré pair.
- Un graphe simple admet une chaîne eulérienne entre deux sommets a et b si et seulement si ce graphe est connexe et si a et b sont les seuls sommets de degré impair de ce graphe.
- Un graphe simple est traversable si et seulement si il a au maximum deux sommets de degré impair.

Exemples

Ponts de Konigsberg

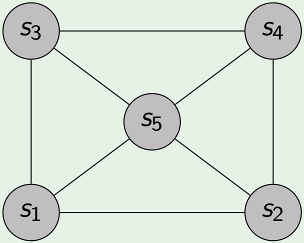




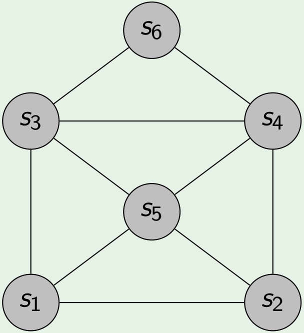
Tous les sommets sont de degré impair ; donc ce graphe n'est ni eulérien ni semi–eulérien.

On ne peut donc pas traverser tous les ponts une et une seule fois.

Dessiner une enveloppe (ouverte/fermée)



Graphe ni eulérien, ni semi–eurélien



Graphe semi–eulérien mais non eulérien.

Graphes hamiltoniens

Définitions

- une chaîne hamiltonienne est une chaîne qui passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe situé entre les deux extrémités de la chaîne.
- Un cycle hamiltonien est un cycle qui passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe.
- Un graphe hamiltonien est un graphe possédant un cycle hamiltonien.

Conditions

A quelle(s) condition(s) un graphe est-il hamiltonien ?
Il n'existe aucun critère simple pouvant le dire... pas comme pour les graphes eulériens. Mais il existe quelques critères suffisants (pas nécessaires).

Théorème 1

Soit G un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour toute paire de sommets (a, b) non adjacents, on a $deg(a) + deg(b) \geq n$ alors G est hamiltonien.

Théorème 2

Soit G un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour tout sommet a de G, on a $deg(a) \geq \frac{n}{2}$, alors G est hamiltonien.

Autres conditions

Propositions

- un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut être hamiltonien.
- si un graphe possède un sommet de degré 2, les deux arêtes dont ce sommet est une extrémité doivent faire partie de la chaîne.
- un graphe complet est toujours hamiltonien.

Chapitre 1 : Graphes non orientés

1. Graphes non orientés
   - Définitions
   - Ordre et Degré
   - Matrice d'Adjacence
   - Isomorphismes de graphes
2. Graphes simples
   - Graphes complets
   - Graphes réguliers
   - Graphes bipartites
   - Graphes planaires
3. Parcourir un graphe
   - Chaîne et cycles
   - Connexité
   - Graphes eulériens
   - Graphes hamiltoniens
4. Coloration
   - Problématique
   - Problème des 4 couleurs
   - Algorithmes de coloration
   - Nombre chromatique

Coloration

Problématique

Colorer un graphe signifie attribuer une couleur à chacun de ses nœuds de manière à ce que deux nœuds adjacents soient de couleurs différentes.
Souvent, on cherche à minimiser le nombre de couleurs nécessaire.

Exemple d'application

Problème d'allocation de fréquences dans les télécommunications : les réseaux de télécommunication sont composés d'émetteurs émettant chacun sur une fréquence particulière et lorsque deux émetteurs sont trop proches on ne peut leur allouer la même fréquence à cause des interférences.

Définitions

Définition

Soit G un graphe non orienté simple.
Colorer G c'est associer une couleur à chaque sommet de G de façon à ce que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes.

Coloration évidente

Si on n'utilise que des couleurs différentes (autant de couleurs que de sommets) on a une coloration triviale.

Nombre chromatique

Le nombre chromatique d'un graphe G, noté par $\chi(G)$ est le nombre minimal de couleurs nécessaires à colorer le graphe

Problème des 4 couleurs

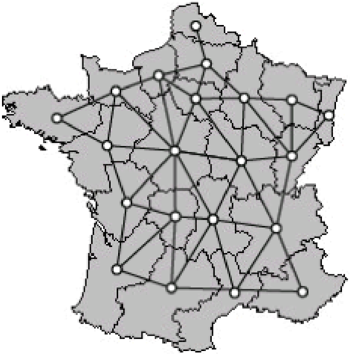
Cas planaire

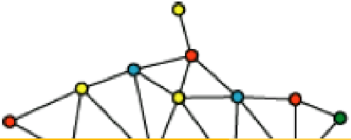
Le problème des 4 couleurs a résisté aux recherches de mathématiciens et informaticiens jusqu'en 1976. Pourtant l'énoncé datait de 1852 : toutes les cartes peuvent être colorées avec 4 couleurs sans que deux régions limitrophes aient la même couleur.

Preuve

Pour la première fois une démonstration mathématique a besoin de l'aide d'ordinateurs : pour compléter la preuve il fallait traiter individuellement 1478 cas critiques. Et pour cela il a fallu 1200 heures de calcul.

Régions de France





Algorithme glouton

1. Ranger les sommets par ordre de degrés décroissants
2. Donner la première couleur au premier sommet.
3. On passe au sommet suivant et on lui donne la première couleur qui n'est pas utilisée par les sommets adjacents
4. on recommence le point 2 jusqu'à la fin de la liste des sommets.

Heuristique

Cet algorithme fonctionne mais ne donnera pas la meilleure coloration possible.
Mais il a une bonne complexité et donne des colorations acceptables sauf dans certains cas.

Algorithme de Welsh et Powell

1. Ranger les sommets par ordre de degrés décroissants
2. Attribuer au premier sommet (A) de la liste une couleur.
3. Suivre la liste en attribuant la même couleur au premier sommet (B) qui ne soit pas adjacent à (A).
4. Suivre (si possible) la liste jusqu'au prochain sommet (C) qui ne soit adjacent ni à A ni à B.
5. Continuer jusqu'à ce que la liste soit finie.
6. Prendre une deuxième couleur pour le premier sommet (D) non encore colorié de la liste.
7. Répéter les opérations 3 à 5.
8. Continuer jusqu'à avoir coloré tous les sommets

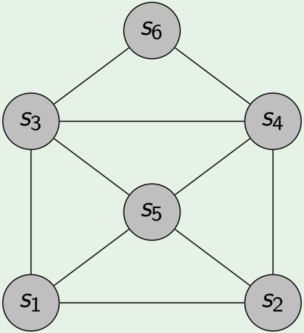
Calcul de $\chi(G)$

Il n'existe pas d'algorithme polynomial qui résolve ce problème dans le cas général pour l'instant.
Il y a toutefois des résultats partiels.

Proposition

- Si G est complet,$\chi(G) = o(G)$
- Si d est le degré le plus élevé des sommets, alors $\chi(G) \leq d + 1$
- Si G contient un sous-graphe complet d'ordre n alors $\chi(G) \geq n$
- Si le graphe est planaire $\chi(G) \leq 4$ (théorème des 4 couleurs).

Exemple de calcul de χ



Le degré max d'un degré est 4, il contient K_3 donc $3 \leq \chi \leq 5$

s_3	s_4	s_5	s_1	s_2	s_6
4	4	4	3	3	2